Exercices Fiche 1

Exercice 1:

Recopier et compléter le tableau suivant:

Mesure en degré	10			72	150
Mesure en radian		$\frac{\pi}{10}$	$\frac{3\pi}{8}$		

Exercice 2:

1. Indiquer, parmi les nombres suivants, ceux qui correspondent aux mesures d'un même angle de vecteurs.

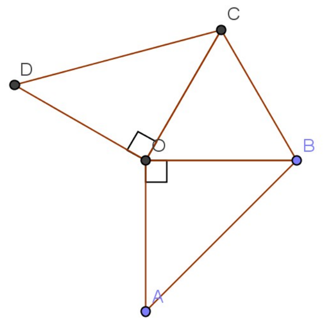
$\frac{\pi}{2}$; $\frac{3\pi}{2}$; - $\frac{\pi}{2}$; $\frac{7\pi}{2}$; - $\frac{3\pi}{2}$; - $\frac{7\pi}{2}$; $\frac{5\pi}{2}$.

2. Dans l'intervalle $[0;8\pi]$, combien de mesures différents existe-t-il pour un angle de vecteurs ayant comme mesure $\frac{\pi}{4}$? Justifier.

Exercice 3:

On sait que le triangle BOC est équilatéral, et que les triangles DOC et OBA sont isocèles en O.
A partir de la figure ci-contre, pour chacun des angles orientés suivants:

- trouvez la mesure de l'angle géométrique associé;
- donnez sa mesure principale.



a. ($\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OC}$)
b. ($\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OD}$)
c. ($\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{OC}$)
d. ($\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{DO}$)
e. ($\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{CB}$)
f. ($\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{BC}$).

Exercice 4:

Le plan orienté est muni d'un repère orthonormé direct (O; $\vec{i}$, $\vec{j}$).
Déterminer:

a. $\sin(\vec{i},\vec{j})$
b. $\cos(2\vec{i},3\vec{j})$
c. $\sin(-\vec{i},5\vec{j})$
d. $\cos(\vec{i},\vec{i}+\vec{j})$
e. $\cos(-\vec{i}-\vec{j},\vec{j})$
f. $\cos(42\vec{i}-7\vec{j},\vec{j}-6\vec{i})$

Exercice 5:

Pour chacun des angles donnés, trouver leur mesure principale et en déduire les valeurs exactes de leur cosinus et de leur sinus :

a. $\frac{31\pi}{6}$ b. $-\frac{13\pi}{4}$ c. $\frac{29\pi}{3}$ d. $\frac{35\pi}{2}$.

Exercice 6:

On donne $\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

En déduire $\sin\frac{2\pi}{5}$, $\cos\frac{3\pi}{5}$, $\sin\frac{3\pi}{5}$, $\cos\frac{\pi}{10}$ et $\sin\frac{\pi}{10}$.

Exercice 7:

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations trigonométrique suivantes:

a. $\sin x=\sin\frac{\pi}{4}$ b. $\cos x=\cos\frac{2\pi}{3}$ c. $\cos x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ d. $\sin x=-\frac{1}{2}$.

Exercice 8:

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations d'inconnue x.

a. $2\cos^2(x)-1=0$

b. $4\sin^2 x-3=0$

CORRECTION

Exercice 1:

Recopier et compléter le tableau suivant:

Mesure en degré	10	18	67,5	72	150	180
Mesure en radian	$\frac{\pi}{18}$	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{72\pi}{180}=\frac{2\pi}{5}$	$\frac{150\pi}{180}=\frac{5\pi}{6}$	π

Exercice 2:

1. Indiquer, parmi les nombres suivants, ceux qui correspondent aux mesures d'un même angle de vecteurs.

$\frac{\pi}{2}$; $\frac{3\pi}{2}$; - $\frac{\pi}{2}$; $\frac{7\pi}{2}$; - $\frac{3\pi}{2}$; - $\frac{7\pi}{2}$; $\frac{5\pi}{2}$.

$-\frac{3\pi}{2}+2\pi=-\frac{\pi}{2}$ et $-\frac{7\pi}{2}+2\pi=-\frac{3\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{2}-2\pi=-\frac{\pi}{2}$

Donc $-\frac{3\pi}{2}$; $-\frac{\pi}{2}$; $-\frac{7\pi}{2}$; $\frac{3\pi}{2}$ correspondent aux mesures d'un même angle de vecteurs.

$\frac{\pi}{2}+2\pi=\frac{5\pi}{2}$ et $-\frac{3\pi}{2}+4\pi=\frac{5\pi}{2}$

Donc $\frac{\pi}{2}$; $\frac{5\pi}{2}$ et $-\frac{3\pi}{2}$ correspondent aux mesures d'un même angle de vecteurs.

2. Dans l'intervalle $[0;8\pi]$, combien de mesures différents existe-t-il pour un angle de vecteurs ayant comme mesure $\frac{\pi}{4}$? Justifier.

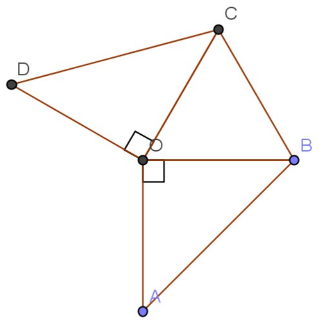
Il existe 3 mesures différentes pour un angle de vecteurs ayant comme mesure $\frac{\pi}{4}$.

$\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}+2\pi=\frac{\pi}{4}+4\pi=\frac{\pi}{4}+6\pi$

Exercice 3:

On sait que le triangle BOC est équilatéral, et que les triangles DOC et OBA sont isocèles en O.
A partir de la figure ci-contre, pour chacun des angles orientés suivants:

– trouvez la mesure de l'angle géométrique associé;



– donnez sa mesure principale.

a. ($\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OC}$) b. ($\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OD}$) c. ($\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{OC}$)
d. ($\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{DO}$) e. ($\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{CB}$) f. ($\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{BC}$).

Les triangles DOC et ABO sont rectangles, isocèles en O, donc:
$(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AO})=\frac{\pi}{4}$; $(\overrightarrow{BO};\overrightarrow{BA})=\frac{\pi}{4}$; $(\overrightarrow{CD};\overrightarrow{CO})=\frac{\pi}{4}$ et $(\overrightarrow{DO};\overrightarrow{DC})=\frac{\pi}{4}$

$\frac{\pi}{4}\in]-\pi;\pi[$ donc la mesure principale des angles $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AO})$; $(\overrightarrow{BO};\overrightarrow{BA})$; $(\overrightarrow{CD};\overrightarrow{CO})$ et $(\overrightarrow{DO};\overrightarrow{DC})$ est $\frac{\pi}{4}$.

$(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})=\frac{\pi}{2}$ et $(\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OD})=\frac{\pi}{2}$

$\frac{\pi}{2}\in]-\pi;\pi[$ donc la mesure principale des angles $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})$ et $(\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OD})$ est $\frac{\pi}{2}$.

Le triangle BOC et ABO est équilatéral, donc:
$(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BO})=\frac{\pi}{3}$; $(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OC})=\frac{\pi}{3}$ et $(\overrightarrow{CO};\overrightarrow{CB})=\frac{\pi}{3}$

$\frac{\pi}{3}\in]-\pi;\pi[$ donc la mesure principale des angles $(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BO})$; $(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OC})$ et $(\overrightarrow{CO};\overrightarrow{CB})$ est $\frac{\pi}{3}$.

a. $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC})=(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})+(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC})$

$(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC})=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}$

$(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC})=\frac{5\pi}{6}$

$\frac{5\pi}{6}\in]-\pi;\pi[$ donc la mesure principale de l'angle $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OC})$ est $\frac{5\pi}{6}$.

b. $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OD})=(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC})+(\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OD})$

$(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OD})=\frac{5\pi}{6}+\frac{\pi}{2}$

$(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OD})=\frac{8\pi}{6}$

$\pi<\frac{8\pi}{6}<2\pi$

$\frac{8\pi}{6}-2\pi=\frac{-4\pi}{6}=\frac{-2\pi}{3}$

$\frac{-2\pi}{3}\in]-\pi;\pi[$ donc la mesure principale de l'angle $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OD})$ est $\frac{-2\pi}{3}$.

c. $(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{OC})=(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CO})+(\overrightarrow{CO},\overrightarrow{OC})$

$(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{OC})=-\frac{\pi}{3}+\pi$

$(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{OC})=\frac{2\pi}{3}$

$\frac{2\pi}{3}\in]-\pi;\pi[$ donc la mesure principale de l'angle $(\overrightarrow{CB};\overrightarrow{OC})$ est $\frac{2\pi}{3}$.

d. $(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{DO})=(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC})+(\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OD})+(\overrightarrow{OD},\overrightarrow{DO})$
$(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{DO})=(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC})+(\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OD})+(\overrightarrow{OD},\overrightarrow{DO})$

$(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{DO})=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}+\pi$

$(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{DO})=\frac{11\pi}{6}$

$\pi<\frac{11\pi}{6}<2\pi$

$\frac{11\pi}{6}-2\pi=-\frac{\pi}{6}$

$-\frac{\pi}{6}\in]-\pi;\pi[$ donc la mesure principale de l'angle $(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{DO})$ est $-\frac{\pi}{6}$.

e. $(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{CB})=(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BO})+(\overrightarrow{BO},\overrightarrow{BC})+(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CB})$

$(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{CB})=-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}+\pi$

$(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{CB})=\frac{5\pi}{12}$

$\frac{5\pi}{12}\in]-\pi;\pi[$ donc la mesure principale de l'angle $(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{CB})$ est $\frac{5\pi}{12}$.

f. $(\overrightarrow{DC},\overrightarrow{BC})=(\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DO})+(\overrightarrow{DO},\overrightarrow{OD})+(\overrightarrow{OD},\overrightarrow{OC})+(\overrightarrow{OC},\overrightarrow{CO})+(\overrightarrow{CO},\overrightarrow{CB})+(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{BC})$

$(\overrightarrow{DC},\overrightarrow{BC})=-\frac{\pi}{4}+\pi-\frac{\pi}{2}+\pi+\frac{\pi}{3}+\pi$

$(\overrightarrow{DC},\overrightarrow{BC})=\frac{31\pi}{12}$

$2\pi<\frac{31\pi}{12}<3\pi$

$\frac{31\pi}{12}-2\pi=\frac{7\pi}{12}$

$\frac{7\pi}{12}\in]-\pi;\pi[$ donc la mesure principale de l'angle $(\overrightarrow{DC};\overrightarrow{BC})$ est $\frac{7\pi}{12}$.

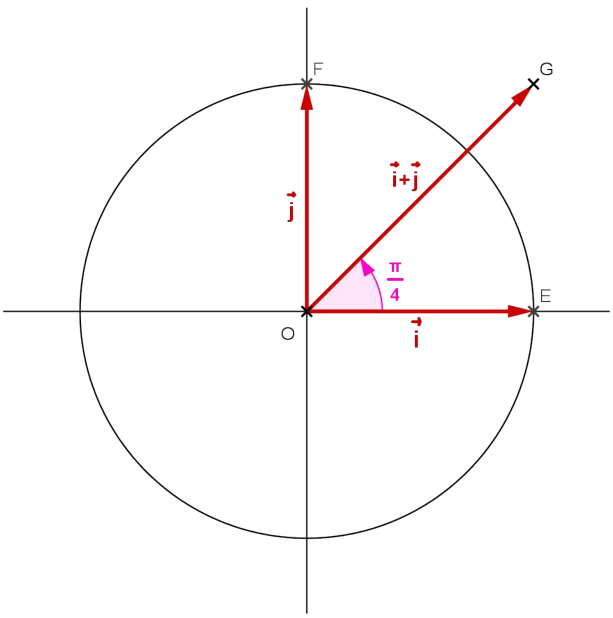
Exercice 4:

Le plan orienté est muni d'un repère orthonormé direct (O; $\vec{i}$, $\vec{j}$).

Déterminer:

a. $\sin(\vec{i},\vec{j})$ b. $\cos(2\vec{i},3\vec{j})$ c. $\sin(-\vec{i},5\vec{j})$ d. $\cos(\vec{i},\vec{i}+\vec{j})$

e. $\cos(-\vec{i}-\vec{j},\vec{j})$ f. $\cos(42\vec{i}-7\vec{j},\vec{j}-6\vec{i})$



a. $\sin(\vec{i},\vec{j})=\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$

b. $\cos(2\vec{i},3\vec{j})=\cos(\vec{i},\vec{j})=\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$

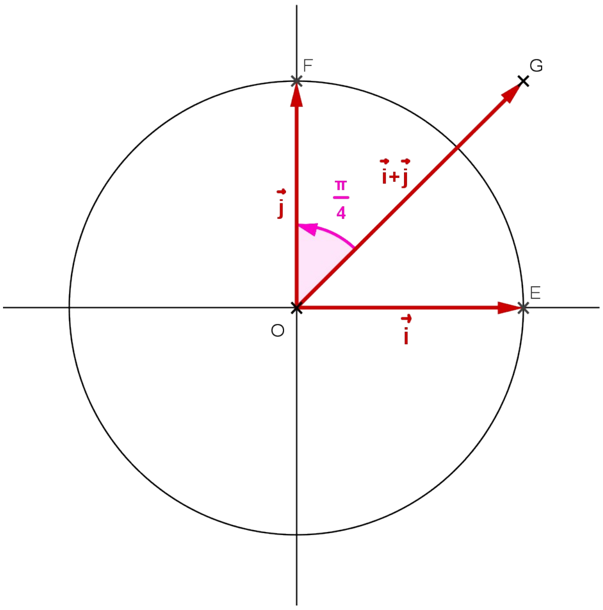
c. $\sin(-\vec{i},5\vec{j})=\sin((\vec{i},\vec{j})+\pi)=-\sin(\vec{i},\vec{j})=-\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1$

d. $\cos(\vec{i},\vec{i}+\vec{j})$

Le point G est le point tel que OEGF est un parallélogramme.
Or, OEGF est un parallélogramme qui possède un angle droit (en O) et deux côtés consécutifs de même longueur (OE=OF) donc OEGF est un carré.

Par suite, $(\overrightarrow{OE},\overrightarrow{OG})=\frac{\pi}{4}(2\pi)$

e. $\cos(-\vec{i}-\vec{j},\vec{j})=\cos\left((\vec{i}+\vec{j},\vec{j})+\pi\right)=-\cos\left((\vec{i}+\vec{j},\vec{j})\right)$



$\cos(-\vec{i}-\vec{j},\vec{j})=-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

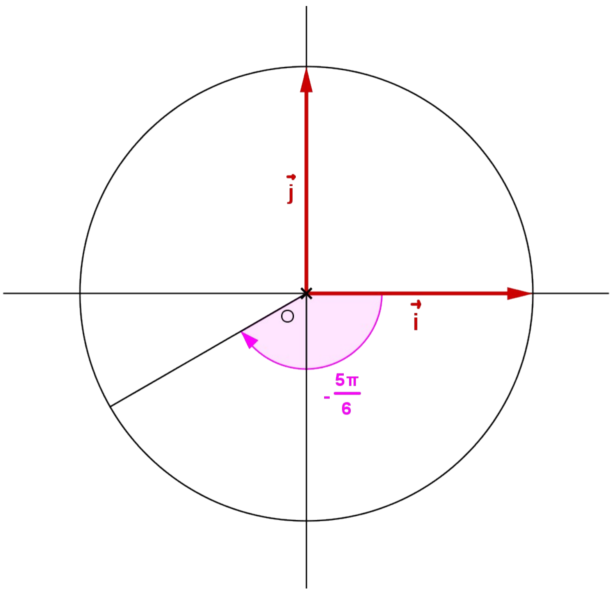
f. $\cos(42\vec{i}-7\vec{j},\vec{j}-6\vec{i})=\cos(7(6\vec{i}-\vec{j}),\vec{j}-6\vec{i})=\cos(6\vec{i}-\vec{j},\vec{j}-6\vec{i})=\cos\left((\vec{j}-6\vec{i},\vec{j}-6\vec{i})+\pi\right)$
$=-\cos\left((\vec{j}-6\vec{i},\vec{j}-6\vec{i})\right)=-\cos(0)=-1$

Exercice 5:

Pour chacun des angles donnés, trouver leur mesure principale et en déduire les valeurs exactes de leur cosinus et de leur sinus :

a. $\frac{31\pi}{6}$

$5\pi<\frac{31\pi}{6}<6\pi$



$\frac{31\pi}{6}-6\pi=\frac{31\pi}{6}-\frac{36\pi}{6}=-\frac{5\pi}{6}$

$-\frac{5\pi}{6}$ est la mesure principale de $\frac{31\pi}{6}$.

$\cos\left(\frac{31\pi}{6}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

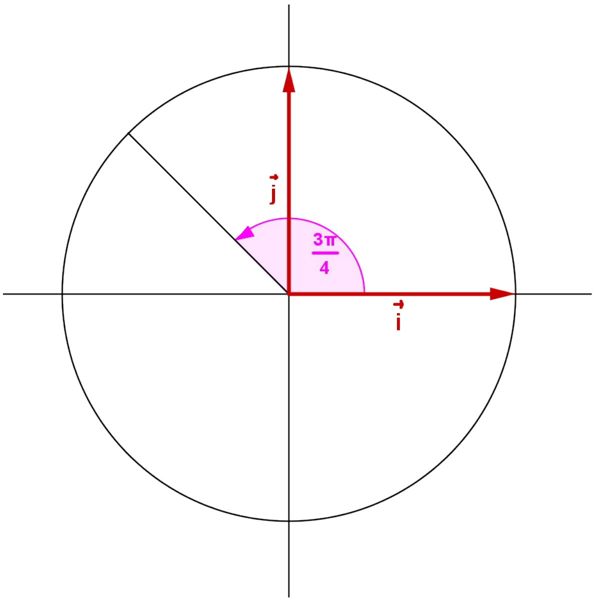
$\sin\left(\frac{31\pi}{6}\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}$

b. $-\frac{13\pi}{4}$

$-4\pi < -\frac{13\pi}{4} < -3\pi$

$-\frac{13\pi}{4} + 4\pi = \frac{3\pi}{4}$

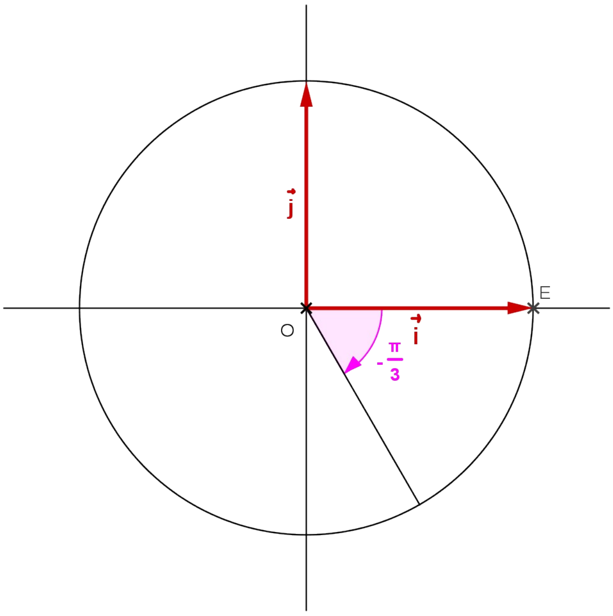
$\frac{3\pi}{4}$ est la mesure principale de $-\frac{13\pi}{4}$.



$\cos\left(-\frac{13\pi}{4}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sin\left(-\frac{13\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

c. $\frac{29\pi}{3}$



$9\pi < \frac{29\pi}{3} < 10\pi$

$\frac{29\pi}{3} - 10\pi = -\frac{\pi}{3}$

$-\frac{\pi}{3}$ est la mesure principale de $\frac{29\pi}{3}$.

$\cos\left(\frac{29\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$

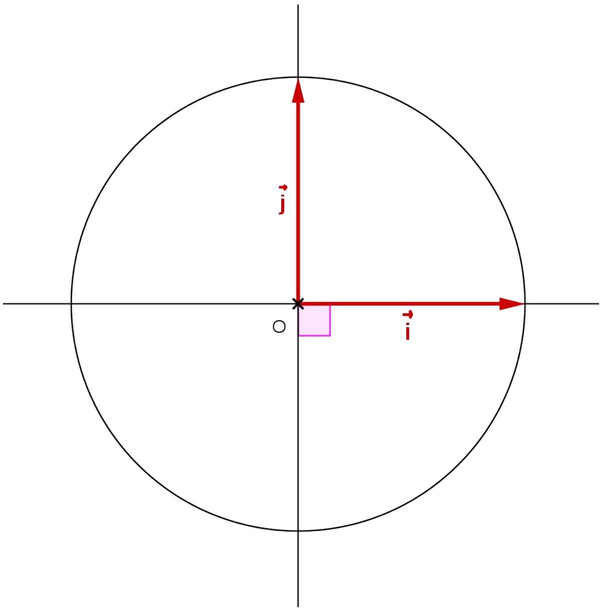
$\sin\left(\frac{29\pi}{3}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

d. $\frac{35\pi}{2}$.

$17\pi < \frac{35\pi}{2} < 18\pi$

$\frac{35\pi}{2}-18\pi=-\frac{\pi}{2}$

$-\frac{\pi}{2}$ est la mesure principale de $\frac{35\pi}{2}$.



$\cos\left(\frac{35\pi}{2}\right)=0$

$\sin\left(\frac{35\pi}{2}\right)=-1$

Exercice 6:

On donne $\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

En déduire $\sin\frac{2\pi}{5}$, $\cos\frac{3\pi}{5}$, $\sin\frac{3\pi}{5}$, $\cos\frac{\pi}{10}$ et $\sin\frac{\pi}{10}$.

$\cos^2\left(\frac{2\pi}{5}\right)+\sin^2\left(\frac{2\pi}{5}\right)=1$

$\sin^2\left(\frac{2\pi}{5}\right)=1-\cos^2\left(\frac{2\pi}{5}\right)$

$\sin^2\left(\frac{2\pi}{5}\right)=1-\frac{(\sqrt{5}-1)^2}{16}$

$\sin^2\left(\frac{2\pi}{5}\right)=\frac{16-5+2\sqrt{5}-1}{16}$

$\sin^2\left(\frac{2\pi}{5}\right)=\frac{10+2\sqrt{5}}{16}$

$\sin^2\left(\frac{2\pi}{5}\right)=\frac{5+\sqrt{5}}{8}$

De plus, $\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)>0$

Donc, $\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)=\frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{\sqrt{8}}$

$\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right)=\cos\left(\pi-\frac{2\pi}{5}\right)=-\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)=\frac{1-\sqrt{5}}{4}$

$\sin\left(\frac{3\pi}{5}\right)=\sin\left(\pi-\frac{2\pi}{5}\right)=\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)=\frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{\sqrt{8}}$

$$\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2\pi}{5}\right)=\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)=\frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{\sqrt{8}}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{10}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2\pi}{5}\right)=\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

Exercice 7:

Résoudre dans ℝ les équations trigonométrique suivantes:

a. $\sin x=\sin\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{\pi}{4}\ (2\pi) \\ \text{ou} \\ x=\pi-\frac{\pi}{4}\ (2\pi) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{\pi}{4}\ (2\pi) \\ \text{ou} \\ x=\frac{3\pi}{4}\ (2\pi) \end{cases}$

b. $\cos x=\cos\frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{2\pi}{3}\ (2\pi) \\ \text{ou} \\ x=-\frac{2\pi}{3}\ (2\pi) \end{cases}$

c. $\cos x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

On sait que $\cos\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\cos x=-\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \cos x=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{3\pi}{4}\ (2\pi) \\ \text{ou} \\ x=-\frac{3\pi}{4}\ (2\pi) \end{cases}$$

d. $\sin x=-\frac{1}{2}$.

On sait que $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}$

$$\sin x=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x=\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{\pi}{3}\ (2\pi) \\ \text{ou} \\ x=\pi-\frac{\pi}{3}\ (2\pi) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{\pi}{3}\ (2\pi) \\ \text{ou} \\ x=\frac{2\pi}{3}\ (2\pi) \end{cases}$$

Exercice 8:

Résoudre dans ℝ les équations d'inconnue x.

a. $2\cos^2(x)-1=0 \Leftrightarrow 2\cos^2(x)=1 \Leftrightarrow \cos^2(x)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos(x)=\sqrt{\frac{1}{2}} \\ \text{ou} \\ \cos(x)=-\sqrt{\frac{1}{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos(x)=\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \text{ou} \\ \cos(x)=-\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos(x)=\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ \text{ou} \\ \cos(x)=-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{\pi}{4}(2\pi) \\ \text{ou} \\ x=-\frac{\pi}{4}(2\pi) \end{cases}$$

b. $4\sin^2 x-3=0 \Leftrightarrow 4\sin^2 x=3 \Leftrightarrow \sin^2 x=\frac{3}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin(x)=\sqrt{\frac{3}{4}} \\ \text{ou} \\ \sin(x)=-\sqrt{\frac{3}{4}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin(x)=\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \text{ou} \\ \sin(x)=-\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin(x)=\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \\ \text{ou} \\ \sin(x)=-\left(\frac{\pi}{6}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{\pi}{6}(2\pi) \\ \text{ou} \\ x=\pi-\frac{\pi}{6}(2\pi) \\ \text{ou} \\ x=-\frac{\pi}{6}(2\pi) \\ \text{ou} \\ x=\pi+\frac{\pi}{6}(2\pi) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{\pi}{6}(2\pi) \\ \text{ou} \\ x=\frac{5\pi}{6}(2\pi) \\ \text{ou} \\ x=-\frac{\pi}{6}(2\pi) \\ \text{ou} \\ x=\frac{7\pi}{6}(2\pi) \end{cases}$$