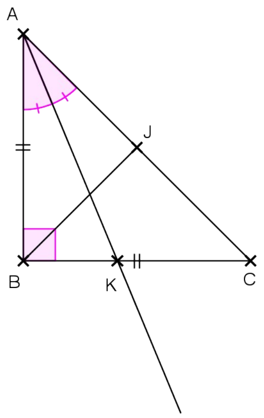
Exercices Fiche 2

Exercice 1:

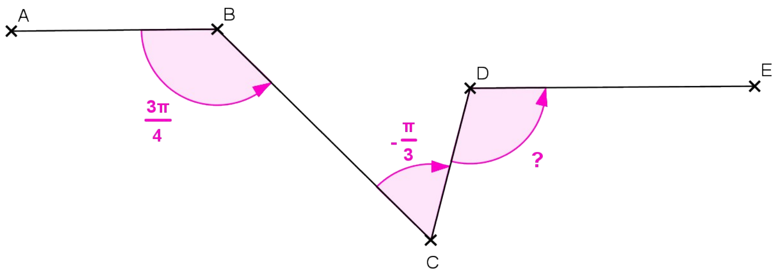
ABC est un triangle rectangle isocèle en B et direct. K est le point d'intersection de [BC] avec la bissectrice de $\widehat{BAC}$.



1. Déterminer la mesure principale, en radians de: $(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CA})$; $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AK})$; $(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{KA})$.
2. Soit J le milieu du segment [AC].
   Démontrer que $(\overrightarrow{BJ},\overrightarrow{CA})=(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA})$

Exercice 2:

ABCDE est la ligne brisée ci-dessous.



On sait que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DE}$ sont colinéaires de même sens.
Déterminer la mesure principale de l'angle $(\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DE})$.

Exercice 3:

On donne $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$.

1. Calculer $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$.
2. Calculer : $\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)$, $\cos\left(\frac{7\pi}{8}\right)$, $\cos\left(\frac{9\pi}{8}\right)$.

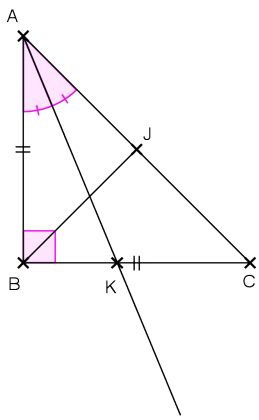
Exercice 4:

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes:
   $\cos x=\frac{-\sqrt{2}}{2}$ $\qquad$ $\sin(3x)=-\frac{1}{2}$
2. Résoudre dans [- π, π] l'équation suivante: $\cos 4x=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

CORRECTION

Exercice 1:

ABC est un triangle rectangle isocèle en B et direct. K est le point d'intersection de [BC] avec la bissectrice de $\widehat{BAC}$.



1. Déterminer la mesure principale, en radians de: $(\vec{BC}, \vec{CA})$; $(\vec{AB}, \vec{AK})$; $(\vec{BC}, \vec{KA})$.
2. Soit J le milieu du segment [AC].
   Démontrer que $(\vec{BJ}, \vec{CA}) = (\vec{BC}, \vec{BA})$

1. ABC est un triangle rectangle isocèle en B et direct donc $(\vec{BC}, \vec{BA})=\frac{\pi}{2}$; $(\vec{CA}, \vec{CB})=\frac{\pi}{4}$ et $(\vec{AB}, \vec{AC})=\frac{\pi}{4}$.

$(\vec{BC}, \vec{CA})=(\vec{BC}, \vec{CB})+(\vec{CB}, \vec{CA})$
$(\vec{BC}, \vec{CA})=\pi-\frac{\pi}{4}$
$(\vec{BC}, \vec{CA})=\frac{3\pi}{4}$
$\frac{3\pi}{4}\in]-\pi;\pi[$ donc la mesure principale de l'angle $(\vec{BC}, \vec{CA})$ est $\frac{3\pi}{4}$.

[AK) est la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$ donc:
$(\vec{AB}, \vec{AK})=\frac{\pi}{4}\div 2=\frac{\pi}{8}$
$\frac{\pi}{8}\in]-\pi;\pi[$ donc la mesure principale de l'angle $(\vec{AB}, \vec{AK})$ est $\frac{\pi}{8}$.

$(\vec{BC}, \vec{KA})=(\vec{BC}, \vec{BA})+(\vec{BA}, \vec{KA})$
$(\vec{BC}, \vec{KA})=(\vec{BC}, \vec{BA})+(\vec{AB}, \vec{AK})$
$(\vec{BC}, \vec{KA})=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{8}$
$(\vec{BC}, \vec{KA})=\frac{5\pi}{8}$
$\frac{5\pi}{8}\in]-\pi;\pi[$ donc la mesure principale de l'angle $(\vec{BC}, \vec{KA})$ est $\frac{5\pi}{8}$.

2. J le milieu du segment [AC] et le triangle ABC est isocèle en B donc [BJ) est à la fois médiane, médiatrice, hauteur et bissectrice issue de B. Par suite: $(\vec{BJ}, \vec{BA})=\frac{\pi}{2}\div 2=\frac{\pi}{4}$
$(\vec{BJ}, \vec{CA})=(\vec{BJ}, \vec{BA})+(\vec{BA}, \vec{CA})$
$(\vec{BJ}, \vec{CA})=(\vec{BJ}, \vec{BA})+(\vec{AB}, \vec{AC})$

$(\overrightarrow{BJ},\overrightarrow{CA})=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}$

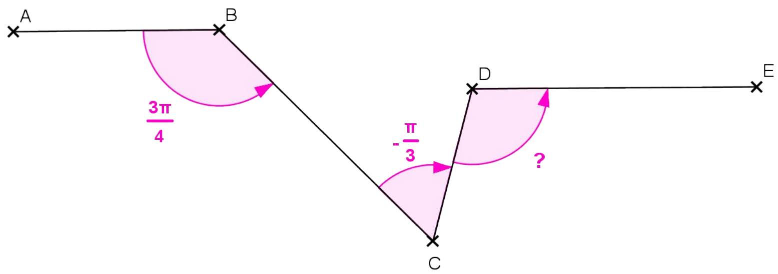
$(\overrightarrow{BJ},\overrightarrow{CA})=\frac{\pi}{2}$

$(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA})=\frac{\pi}{2}$

Donc, $(\overrightarrow{BJ},\overrightarrow{CA})=(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA})$

Exercice 2:

ABCDE est la ligne brisée ci-dessous.



On sait que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DE}$ sont colinéaires de même sens.
Déterminer la mesure principale de l'angle $(\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DE})$.

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DE}$ sont colinéaires de même sens donc $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DE})=0(2\pi)$

$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC})+(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{DC})+(\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DE})=0(2\pi)$
$(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC})+\pi+(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD})+(\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DE})=0(2\pi)$
$\frac{3\pi}{4}+\pi-\frac{\pi}{3}+(\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DE})=0(2\pi)$

$(\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DE})=\frac{\pi}{3}-\pi-\frac{3\pi}{4}(2\pi)$

$(\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DE})=\frac{-17\pi}{12}(2\pi)$

$-2\pi<\frac{-17\pi}{12}<-\pi$

$\frac{-17\pi}{12}+2\pi=\frac{7\pi}{12}$

$\frac{7\pi}{12}\in]-\pi;\pi[$ donc la mesure principale de l'angle $(\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DE})$ est $\frac{7\pi}{12}$.

Exercice 3:

On donne $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$.

1. Calculer $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$.
2. Calculer : $\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)$, $\cos\left(\frac{7\pi}{8}\right)$, $\cos\left(\frac{9\pi}{8}\right)$.

1. $\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right)+\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)=1$

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)=1-\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right)$$
$$\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)=1-\frac{2+\sqrt{2}}{4}$$
$$\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)=\frac{2-\sqrt{2}}{4}$$

Or, $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)>0$

Donc, $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)=\frac{2-\sqrt{2}}{2}$

2. $\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}\right)$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$$
$$\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)=\frac{2-\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos\left(\frac{7\pi}{8}\right)=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{8}\right)$$
$$\cos\left(\frac{7\pi}{8}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$$
$$\cos\left(\frac{7\pi}{8}\right)=-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

$$\cos\left(\frac{9\pi}{8}\right)=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{8}\right)$$
$$\cos\left(\frac{9\pi}{8}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$$
$$\cos\left(\frac{9\pi}{8}\right)=-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

Exercice 4:

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes:

   $\cos x=\frac{-\sqrt{2}}{2}$ $\qquad$ $\sin(3x)=-\frac{1}{2}$

2. Résoudre dans [- π, π] l'équation suivante: $\cos(4x)=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

1. On sait que $\cos\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\cos x=-\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow \cos x=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)\Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{3\pi}{4}\ (2\pi) \\ \text{ou} \\ x=-\frac{3\pi}{4}\ (2\pi) \end{cases}$$

$\sin(3x)=-\frac{1}{2}$

On sait que $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}$

$$\sin(3x)=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin(3x)=\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x=-\frac{\pi}{6}\,(2\pi) \\ \text{ou} \\ 3x=\frac{7\pi}{6}\,(2\pi) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\frac{\pi}{18}\,(\frac{2\pi}{3}) \\ \text{ou} \\ 3x=\frac{7\pi}{18}\,(\frac{2\pi}{3}) \end{cases}$$

2. $\cos(4x)=\frac{\sqrt{3}}{2}$

On sait que $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\cos(4x)=\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \cos(4x)=\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 4x=\frac{\pi}{6}\,(2\pi) \\ \text{ou} \\ 4x=-\frac{\pi}{6}\,(2\pi) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{\pi}{24}\,(\frac{\pi}{2}) \\ \text{ou} \\ x=-\frac{\pi}{24}\,(\frac{\pi}{2}) \end{cases}$$

Les solutions de l'équation dans [- π, π] sont: $\frac{\pi}{24}$, $\frac{13\pi}{24}$, $-\frac{11\pi}{24}$, $-\frac{\pi}{24}$, $\frac{11\pi}{24}$, $-\frac{13\pi}{24}$