Vecteurs du plan
Equations cartésiennes d'une droite

I. Vecteurs du plan.

$\mathscr{R} = (O; \vec{i}, \vec{j})$ est un repère du plan

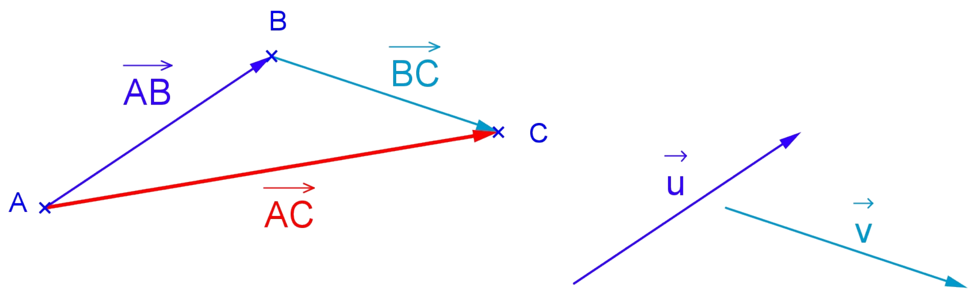
1,1 Somme de deux vecteurs.

i. Définition.

On nomme somme des vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ le vecteur $\vec{s}\begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \end{pmatrix}$. On note $\vec{s} = \vec{u} + \vec{v}$

ii. Relation de Chasles.

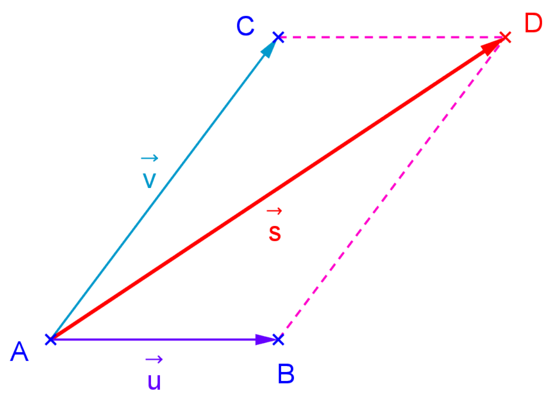
$\vec{u} = \overrightarrow{AB}$; $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$; $\vec{s} = \overrightarrow{AC}$



$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

iii. Construction géométrique de la somme de deux vecteurs lorsque l'on choisit deux représentants ayant la même origine.

$\vec{u} = \overrightarrow{AB}$; $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.
On choisit D tel que $\vec{v} = \overrightarrow{BD}$ et ABDC est un parallélogramme.
$\vec{s} = \vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$



1.2. Multiplication d'un vecteur par un nombre réel.

i. Définition.

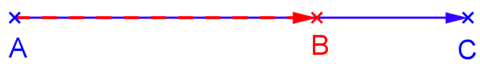
λ est un nombre réel et $\vec{u}$ est un vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Le produit du vecteur $\vec{u}$ par le nombre réel λ est le vecteur : $\vec{v}=\lambda\vec{u}\begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix}$

ii. Interprétation géométrique.

$\vec{u}$ est un vecteur du plan donné. λ est un nombre réel donné.
$\vec{u}=\overrightarrow{AB}$; $\vec{v}=\overrightarrow{AC}=\lambda\vec{u}$

- Si $\vec{u}=\vec{0}$ (donc A=B) alors $\lambda\vec{u}=\vec{0}$ et A=C.
- Si λ =0 alors $\lambda\vec{u}=\vec{0}$ et A=C.
- Si $\vec{u}\neq\vec{0}$ et $\lambda>0$



AC= λ AB et $C\in[AB)$
Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ont le même sens.
Remarque :
Si $0<\lambda<1$ alors $C\in[AB]$
Si $\lambda=1$ alors C=B
Si $\lambda>1$ alors les points A ; B et C sont alignés dans cet ordre.

- Si $\vec{u}\neq\vec{0}$ et $\lambda>0$

AC=- λ AB et $C\in(AB)$ et $C\notin[AB)$
Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont de sens contraire.
Les points B ; A et C sont alignés dans cet ordre.
Cas particulier : $\lambda=-1$
$\overrightarrow{AC}=(-1)\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{AB}$

2. Vecteurs colinéaires.

2.1. Définition.

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls.
Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits colinéaires s'il existe un réel k non nul tel que :
$\vec{u}=k\vec{v}$.
Ainsi, deux vecteurs non nuls sont colinéaires s'ils ont même direction.

Remarque:
Comme $0\vec{v} = \vec{0}$, on peut dire que le vecteur nul est colinéaire avec tout vecteur.

Exemple:
Les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\6\end{pmatrix}$ sont colinéaires puisque $\vec{v}=2\vec{u}$.

2.2. Condition analytique.

Soit (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$) un repère du plan. Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ deux vecteurs.
Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $xy'-x'y=0$.

Démonstration :
La propriété est vraie si l'un des deux vecteurs est nul ($0y'-x'0=0$). Nous supposerons donc pour notre démonstration que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls.

- Supposons que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.
  Alors, il existe un réel k tel que $\vec{u}=k\vec{v}$.
  Cela se traduit en terme de coordonnées: $x=kx'$ et $y=ky'$.
  On a donc $xy'-x'y=kx'y'-x'ky'=kx'y'-kx'y'=0$.

- Supposons $xy'-x'y=0$.
  Comme le vecteur $\vec{u}$ est supposé non nul, l'une de ses coordonnées est non nulle: son abscisse x par exemple. On peut donc définir le réel k tel que $k=\frac{x'}{x}$.
  $xy'-x'y=0$ donne $y'=\frac{x'}{x}y=ky$ (en divisant par x qui est non nul).
  On a donc $x'=kx$ et $y'=ky$, et donc $\vec{v}=k\vec{u}$.
  Ce qui prouve que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

2.3. Exemple.

Les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix}$ sont-ils colinéaires ?
Utilisons la formule précédente: $4\times 6-5\times 4=24-25=-1\neq 0$.
On peut donc conclure que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

d. rappel.

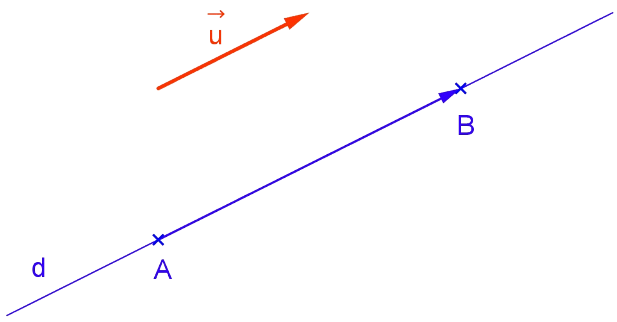
Les points A ; B et C sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

3. Équations de droites.

3.1. Vecteur directeur.

Définition:

Soit d une droite du plan, soient A et B deux points distincts de la droite d.
On appelle vecteur directeur de d tout vecteur non nul $\vec{u}$ colinéaire au vecteur $\overrightarrow{AB}$.



3.2. Remarques.

- La direction d'un vecteur directeur de d définit la direction de la droite d.
- Deux vecteurs directeurs d'une même droite d sont donc non nuls et colinéaires. Il en existe donc une infinité.
- On peut définir une droite d par la donnée d'un point A et d'un vecteur directeur $\vec{u}$:
  $M \in d \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.

Propriété:

Soit d et d' deux droites et $\vec{u}$ et $\overrightarrow{u'}$ deux vecteurs directeurs respectifs.
d et d' sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{u'}$ sont colinéaires.

3.3. Équation cartésienne.

Théorème:

Toute droite d du plan admet une équation de la forme $ax+by+c=0$ où a, b et c sont trois réels, a et b étant non simultanément nul.
Cette équation est <u>une équation cartésienne</u> de la droite d.

Le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d.

Démonstration:

Soit d une droite passant par le point $A(x_A ; y_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$. $\vec{u}$ n'étant pas le vecteur nul, α et β ne sont pas simultanément nuls.

$M(x;y)\in d \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-x_A\\ y-y_A\end{pmatrix}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.

$\Leftrightarrow (x-x_A)\beta-(y-y_A)\alpha=0$

$\Leftrightarrow \beta\ x - \alpha\ y+(-\beta y_A+\alpha x_A)=0$

Posons $a=\beta$, $b=-\alpha$ et $c=-\beta y_A+\alpha x_A$.

On peut donc dire que le point M appartient à la droite d si et seulement si ses coordonnées vérifient $ax+by+c=0$ avec a et b non simultanément nuls.

De plus, le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix}-b\\ a\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d.

Remarque:

Une droite admet une infinité d'équations cartésiennes.

En effet, si la droite d admet pour équation cartésienne $ax+by+c=0$, alors pour tout réel k non nul, $kax+kby+kc=0$ est aussi une équation cartésienne de d. Cette remarque est équivalente au fait qu'il existe une infinité de vecteurs directeurs pour une même droite.

3.4. Exemples.

i. Soit la droite d d'équation $2x-3y+7=0$. La droite d admet pour vecteur directeur le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\ 2\end{pmatrix}$.

ii. Dans un repère orthonormé, soit le point A de coordonnées (1;-2) et le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $\begin{pmatrix}-2\\ 3\end{pmatrix}$.

Déterminons une équation cartésienne de la droite d passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$.

D'après le théorème, nous savons que la droite d a pour équation $ax+by+c=0$ avec $a=3$ et $b=-(-2)=2$ d'où d a pour équation $3x+2y+c=0$.

Déterminons c.

Pour cela, nous allons utiliser le fait que le point A appartient à la droite d.

A appartient à d implique que $3\times 1+2\times(-2)+c=0$, soit $3-4+c=0$. Ce qui nous donne $c=1$.

Donc, d a pour équation cartésienne: $3x+2y+1=0$.

3.5. Propriété.

Propriété:

Deux droites d et d' d'équations cartésiennes respectives $ax+by+c=0$ et $a'x+b'y+c'=0$ sont parallèles si et seulement si $ab'-a'b=0$.

Démonstration:

La droite d admet pour vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\ a\end{pmatrix}$ et la droite d' admet pour vecteur directeur $\vec{u'}\begin{pmatrix}-b'\\ a'\end{pmatrix}$.

d et d' sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{u'}$ sont colinéaires.

Or $\vec{u}$ et $\vec{u'}$ sont colinéaires si et seulement si $-ba'-(-ab')=0$.

Donc d et d' sont parallèles si et seulement si $ab'-a'b=0$.

Exemple:
Les droites d et d' d'équations respectives $2x+3y-5=0$ et $-10x-15y+7=0$ sont parallèles. En effet, $2\times(-15)-3\times(-10)=0$.

3.6. Équations réduites.

Considérons une droite d d'équation cartésienne (E): $ax+by+c=0$, a et b étant deux réels non nuls simultanément.

Supposons que b soit nul, a est alors nécessairement non nul et (E) devient: $x=-\frac{c}{a}$ et la droite d est parallèle à l'axe des abscisses.

Supposons que b soit non nul, (E) devient alors $y=\frac{-a}{b}x-\frac{c}{b}$.

En posant $m=\frac{-a}{b}$ et $p=\frac{-c}{b}$, on en déduit que la droite d a pour équation $y=mx+p$.

Propriété:

Toute droite d du plan a pour équation $y=mx+p$ ou $x=x_0$ appelées équations réduites.

Remarque :

Lorsque $b\neq 0$, $d: ax+by+c=0$ et $d: y=mx+p$ avec $m=\frac{-a}{b}$.

m est le coefficient directeur de d .

$\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d .

Soit $\vec{V}=-\frac{1}{b}\vec{u}$. $\vec{V}\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}$

$\vec{V}$ est un vecteur directeur de d .

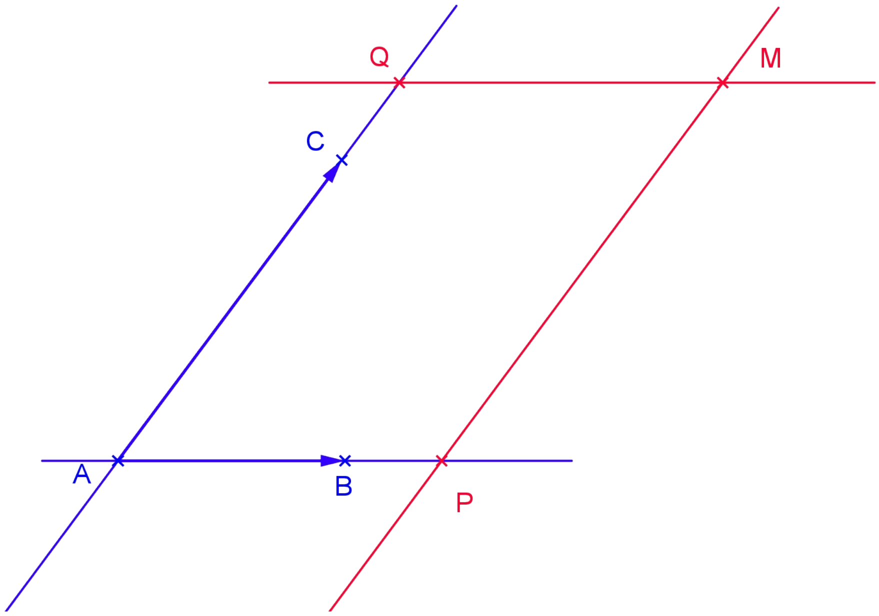
4. Décomposition d'un vecteur.

4.1. Propriété-définition.

Soient A, B et C trois points non alignés du plan.
Pour tout point M du plan, il existe des réels x et y tels que : $\overrightarrow{AM}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$.
Ce couple $(x;y)$ est unique.
On dit que (A; $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$) est un repère du plan et que $(x;y)$ est le couple de coordonnées du point M dans ce repère.

Démonstration:
Soit A, B et C trois points du plan non alignés.
Soit M un point du plan.

Traçons la parallèle à la droite(AC) passant par M, elle coupe la droite (AB) en P.
Traçons la parallèle à la droite (AB) passant par M, elle coupe la droite (AC) en Q.



Existence.

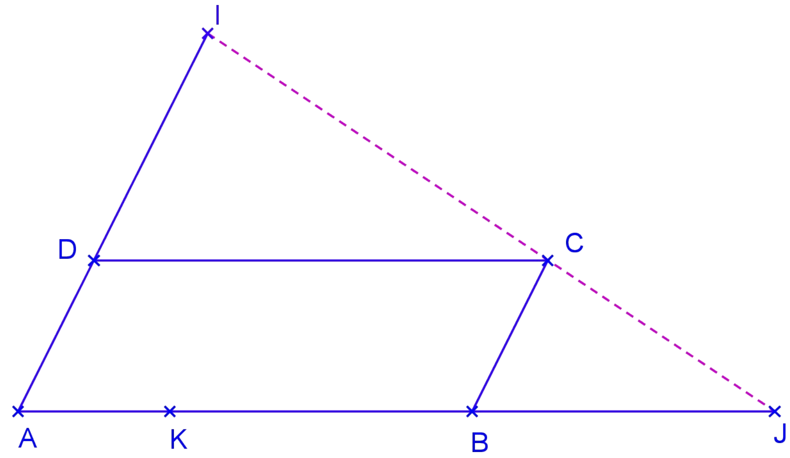
P appartient à la droite (AB), donc les points A, B et P sont alignés. Par conséquent, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AP}$ sont colinéaires. Donc, il existe un nombre réel x tel que $\overrightarrow{AP} = x\ \overrightarrow{AB}$.
De même, Q appartient à la droite (AC), donc les points A, C et Q sont alignés. Par conséquent, les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AQ}$ sont colinéaires. Donc, il existe un nombre réel y tel que $\overrightarrow{AQ} = y\ \overrightarrow{AC}$.
Les droites (AQ) et (AP) étant respectivement parallèles aux droites (QM) et (AP), nous pouvons en déduire que le quadrilatère AQMP est un parallélogramme.
Par suite, nous avons $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AQ}$, en remplaçant dans l'égalité, $\overrightarrow{AM}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$.

Unicité.

Démontrons que les réels x et y trouvés précédemment sont uniques.
Supposons qu'il existe deux couples de réels $(x;y)$ et $(x';y')$ tels que $\overrightarrow{AM}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AM}=x'\overrightarrow{AB}+y'\overrightarrow{AC}$.
On a alors $x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}=x'\overrightarrow{AB}+y'\overrightarrow{AC}$ et donc $(x-x')\overrightarrow{AB} = (y'-y)\overrightarrow{AC}$.
Supposons que $x-x'\neq 0$, on a alors $\overrightarrow{AB}=\frac{y'-y}{x-x'}\overrightarrow{AC}$. Ce qui signifierait que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires et donc que les points A, B et C sont alignés. Ce qui est impossible.
On en déduit que $x=x'$. On a donc que $(y'-y)\overrightarrow{AC}=0$.
Les points A et C n'étant pas confondus, on en déduit que $y=y'$.
Donc le couple $(x;y)$ est unique.

4.2. Exemple.

Soit ABCD un parallélogramme. Soit le point I tel que $\overrightarrow{DI}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AD}$, soit le point K tel que $\overrightarrow{AK}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et soit le point J, symétrique de K par rapport au point B.



Montrons que les points I, C et J sont alignés.

Nous allons, pour cela, déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{IC}$ et $\overrightarrow{IJ}$ dans le repère (A, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$).
On sait que $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AJ}=\frac{5}{3}\overrightarrow{AB}$ et que $\overrightarrow{AI}=\frac{5}{2}\overrightarrow{AD}$.

On a: $\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AC}=-\frac{5}{2}\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}-\frac{3}{2}\overrightarrow{AD}$.

$\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AJ}=-\frac{5}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{5}{3}\overrightarrow{AB}=\frac{5}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{5}{2}\overrightarrow{AD}$.

Donc, dans le repère (A, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$), $\overrightarrow{IC}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}1\\-\frac{3}{2}\end{pmatrix}$, et $\overrightarrow{IJ}$ $\begin{pmatrix}\frac{5}{3}\\-\frac{5}{2}\end{pmatrix}$.

Or $1\times\left(-\frac{5}{2}\right)-\left(-\frac{3}{2}\right)\times\frac{5}{3}=0$. D'où, les vecteurs $\overrightarrow{IC}$ et $\overrightarrow{IJ}$ sont colinéaires.
Par conséquent, les points I, C et J sont alignés.

4.3. Propriété.

<u>*Propriété:*</u>

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires du plan.
Pour tout réel $\vec{w}$ du plan, il existe un unique couple de réels $(x;y)$ tel que $\vec{w}=x\vec{u}+y\vec{v}$.

<u>Démonstration:</u>
Soit A un point du plan, B, C et M trois points tels que $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$ et $\vec{w}=\overrightarrow{AM}$. D'après la propriété précédente, il existe un unique coupe de réels $(x;y)$ tel que $\vec{w}=x\vec{u}+y\vec{v}$. Nous admettrons que $(x;y)$ ne dépend pas de A.