Exercices Fiche 1

Exercice 1:

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -6 \end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix} 3 \\ -9 \end{pmatrix}$, $\vec{w}\begin{pmatrix} -\frac{5}{3} \\ 6 \end{pmatrix}$.

1. Tracer le représentant d'origine O de chacun de ces vecteurs.
2. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont-ils colinéaires ?
3. Les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont-ils colinéaires ?

Exercice 2:

Soient les points E(-7; 6), F(3;3), G(-8;-1) et H(4;-5).
1. Les droites (EF) et (GH) sont-elles parallèles ?
2. Soit $L(x;-5)$. Déterminer x pour que les droites (EF) et (GL) soient parallèles.

Exercice 3:

Soient A et B deux points distincts du plan.
Le point C est défini par: $4\overrightarrow{CA}-5\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}$.
1. Construire le point C après avoir exprimé le vecteur $\overrightarrow{AC}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
2. Démontrer que les points A, B et C sont alignés.

Exercice 4:

Représenter, dans un repère (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$), les droites suivantes:
$d_1: 3x-y+2=0$
$d_2: 4x-1=0$
$d_3: -3x+y=0$.

Exercice 5:

Soit d une droite passant par le point A(5;-2) et dont $\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ -10 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur. Déterminer une équation cartésienne de d.

Exercice 6:

Soit les points A(1;-4), B(3;4) et C(2;0).
1. Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB).
2. En déduire que les points A, B et C sont alignés.

Exercice 7:

Les équations suivantes sont-elles des équations de droites ? Si oui, donner un vecteur directeur de la droite.
1. $\sqrt{2}x+y+5=0$
2. $\sqrt{2x}+y+5=0$
3. $2x+\frac{3}{2y}+4=0$
4. $2x+3-2y=5x$.

Exercice 8:

Soit m un réel et d la droite d'équation $x+my+3=0$.
Peut-on trouver m tel que:
1. $\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ soit un vecteur directeur de d.

2. A(-2;3) appartienne à la droite d .
3. d soit parallèle à la droite d'équation $3x-y=0$.
4. d soit parallèle à l'axe des abscisses.
5. d soit parallèle à l'axe des ordonnées.
6. d passe par l'origine du repère.
7. d passe par le point J(0;1).

Exercice 9:

ABCD est un parallélogramme.

Les points I, J, K et L sont tels que $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BJ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CK}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DL}=\frac{1}{3}\overrightarrow{DA}$.

1. Décomposer le vecteur $\overrightarrow{IJ}$ sur les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$, et les vecteurs $\overrightarrow{LK}$ sur les vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{DC}$.
2. Démontrer que IJKL est un parallélogramme.

Exercice 10:

Construire un triangle ABC, puis les points D, E et F tels que $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BF}=2\overrightarrow{BC}$.

Le but est de démontrer par trois méthodes différentes que D, E et F sont alignés.

1. <u>Solution analytique</u> dans le repère (A; $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$).

a. Déterminer les coordonnées de D, E et F.
b. Démontrer que D, E, F sont alignés.

2. <u>Solution vectorielle.</u>

a. Décomposer $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{DF}$ sur $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
b. Démontrer que D, E et F sont alignés.

3. <u>Solution géométrique.</u>

La parallèle à (DE) passant par C coupe [AB] en un point I.
a. Démontrer que E est le milieu de [AI].
b. En déduire que I est le milieu de [EB].
c. Démontrer alors que la droite (CI) est parallèle à la droite (FD). Conclure.

CORRECTION

Exercice 1:

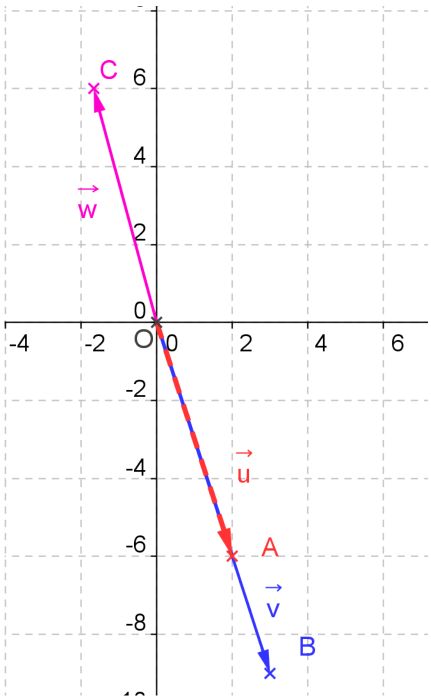
Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-6\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\-9\end{pmatrix}$, $\vec{w}\begin{pmatrix}-\frac{5}{3}\\6\end{pmatrix}$.

1. Tracer le représentant d'origine O de chacun de ces vecteurs.

$\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-6\end{pmatrix}$ $\quad \vec{u}=\overrightarrow{OA}$ $\quad A(2;-6)$

$\vec{v}\begin{pmatrix}3\\-9\end{pmatrix}$ $\quad \vec{v}=\overrightarrow{OB}$ $\quad B(3;-9)$

$\vec{w}\begin{pmatrix}-\frac{5}{3}\\6\end{pmatrix}$ $\quad \vec{w}=\overrightarrow{OC}$ $\quad C\left(\frac{-5}{3};6\right)$



2. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont-ils colinéaires ?

$\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-6\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\-9\end{pmatrix}$

$2\times(-9)-(-6)\times 3=-18+18=0$

Donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

3. Les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont-ils colinéaires ?

$\vec{v}\begin{pmatrix}3\\-9\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}-\frac{5}{3}\\6\end{pmatrix}$

$3\times 6-(-9)\times\left(\frac{-5}{3}\right)=18-15=3\neq 0$

Donc, les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas colinéaires.

Remarque :

On vérifie sur le dessin que les points O ; A et B sont alignés et que les points O, B et C ne sont pas alignés.

Exercice 2:

Soient les points E(-7; 6), F(3;3), G(-8;-1) et H(4;-5).

1. Les droites (EF) et (GH) sont-elles parallèles ?

$\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}10\\-3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{GH}\begin{pmatrix}12\\-4\end{pmatrix}$.

$10\times(-4)-(-3)\times12=-40+36=-4\neq0$

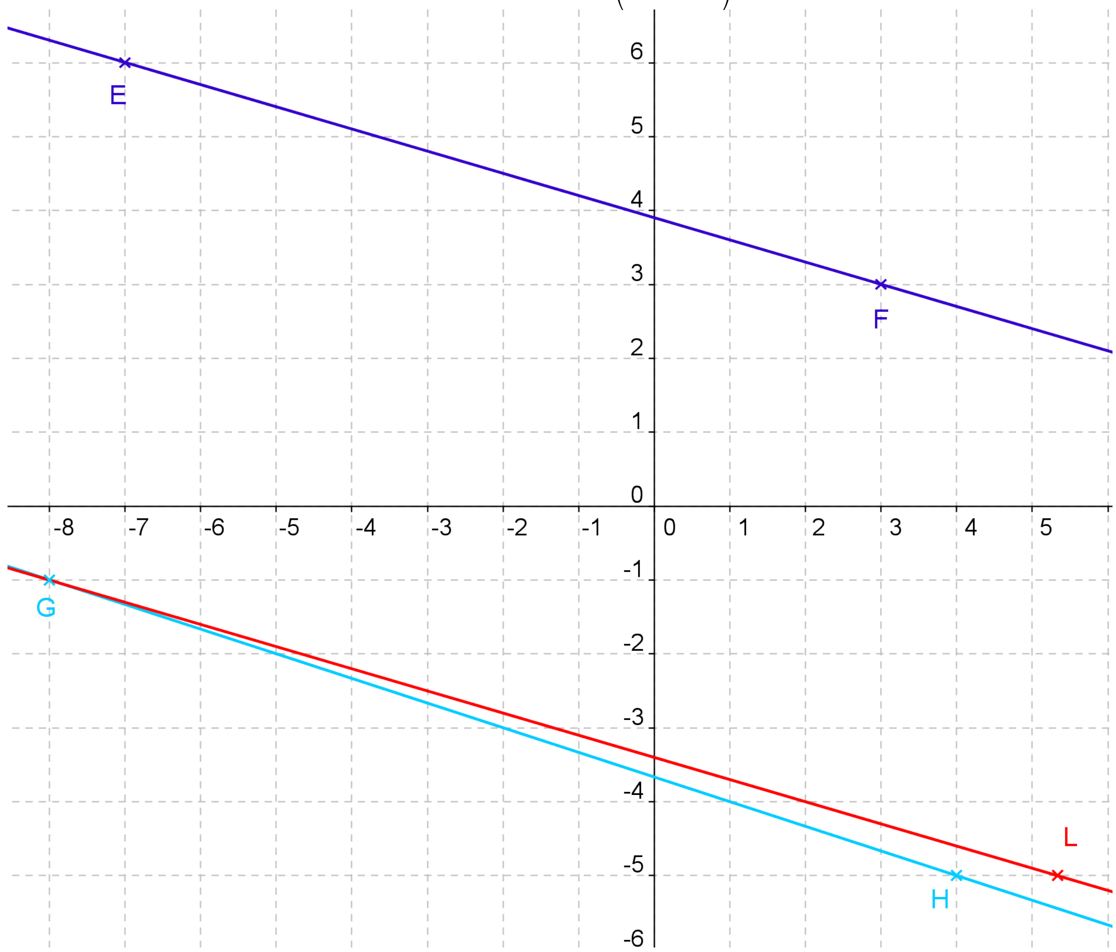
Donc, les vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{GH}$ ne sont pas colinéaires.
Par suite, les droites (EF) et (GH) ne sont pas parallèles.

2. Soit $L(x;-5)$. Déterminer x pour que les droites (EF) et (GL) soient parallèles.

$\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}10\\-3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{GL}\begin{pmatrix}x+8\\-4\end{pmatrix}$

Les vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{GL}$ sont colinéaires
$\Leftrightarrow 10\times(-4)-(-3)\times(x+8)=0$
$\Leftrightarrow -40+3x+24=0$
$\Leftrightarrow x=\dfrac{16}{3}$

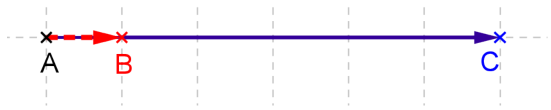
Les droites (EF) et (GL) sont parallèles si et seulement si $L\left(\dfrac{16}{3};-5\right)$.



Exercice 3:

Soient A et B deux points distincts du plan.
Le point C est défini par: $4\overrightarrow{CA}-5\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}$.
1. Construire le point C après avoir exprimé le vecteur $\overrightarrow{AC}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

$4\overrightarrow{CA}-5\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}$
$4\overrightarrow{CA}-5(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB})=\overrightarrow{AB}$
$-\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AB}+5\overrightarrow{AB}$
$\overrightarrow{AC}=6\overrightarrow{AB}$



2. Démontrer que les points A, B et C sont alignés.

Les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires donc les points A, B et C sont alignés.

Exercice 4:

Représenter, dans un repère (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$), les droites suivantes:
$d_1 : 3x-y+2=0$
$d_2 : 4x-1=0$
$d_3 : -3x+y=0$.

Nous avons 3 équations de la forme : $ax+by+c=0$ avec $a\neq 0$ ou $b\neq 0$

- Pour la droite d_1

Le coefficient de b est non nul. On obtient une équation réduite de d_1 de la forme : $y=mx+p$.
On déterminera les coordonnées de deux points distincts de la droite en donnant deux valeurs distinctes à x en calculant les ordonnées correspondantes.
$y=3x+2$
Pour $x=0$ $y=2$ $A(0;2)$
Pour $x=1$ $y=5$ $B(1;5)$

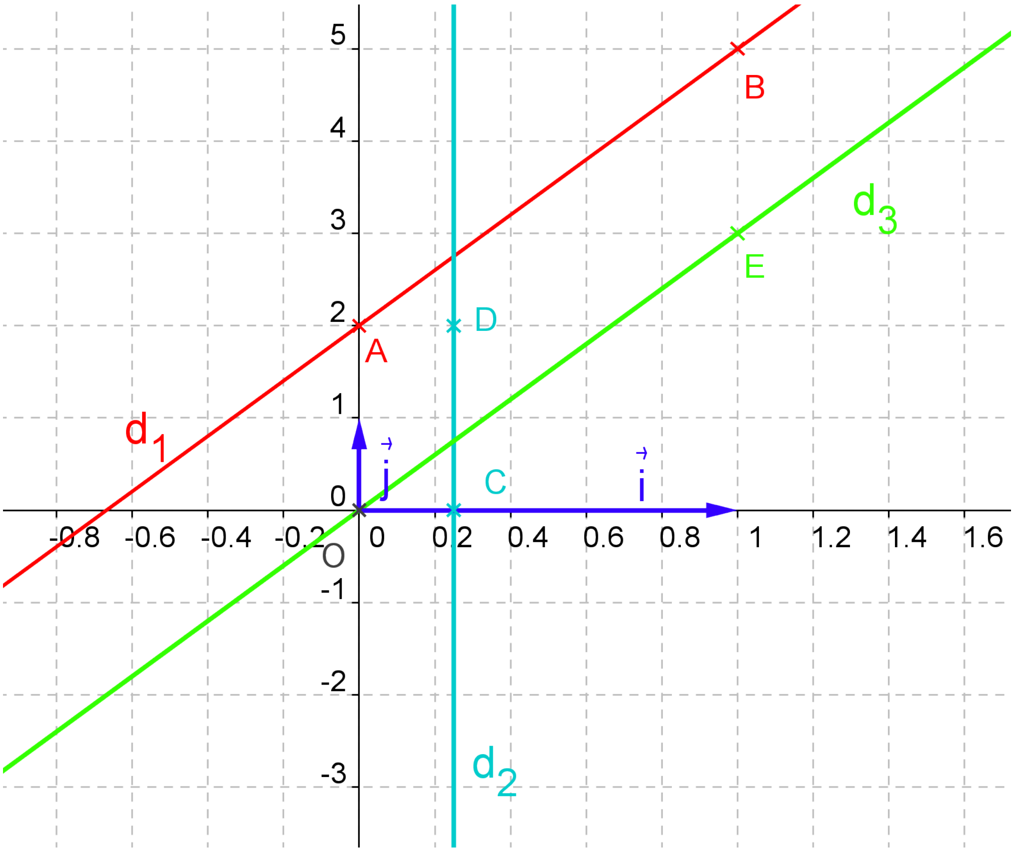
- Pour la droite d_2

Le coefficient de b est nul. On obtient une équation réduite de d_2 de la forme : $x=x_0$.
$x=\frac{1}{4}$
d_2 est une droite verticale, si le repère est orthogonal.

Pour déterminer 2 points distincts de d_2, on choisit 2 points d'abscisse $\frac{1}{4}$ et d'ordonnées distinctes. Par exemple $C\left(\frac{1}{4};0\right)$ et $D\left(\frac{1}{4};2\right)$.

- Pour la droite d_3

Le coefficient de b est non nul, donc on utilise la même méthode que pour d_1 . Toutefois on est dans le cas particulier $c=0$. C'est à dire si $x=0$ alors $y=0$; la droite d_3 passe par l'origine.
$O(0;0)$ et $E(1;3)$



Exercice 5:

Soit d une droite passant par le point A(5;-2) et dont $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\-10\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur. Déterminer une équation cartésienne de d.

$M(x\,;y)\qquad \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-5\\y+2\end{pmatrix}$

$M\in d \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.

$\Leftrightarrow -10(x-5)-3(y+2)=0$

$\Leftrightarrow -10x+50-3y-6=0$

$\Leftrightarrow -10x-3y+44=0$

$d: -10x-3y+44=0$

Exercice 6:

Soit les points A(1;-4), B(3;4) et C(2;0).

1. Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB).

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\8\end{pmatrix}$

La droite (AB) est la droite passant par le point A et de vecteur directeur $\overrightarrow{AB}$.

$M(x\,;y)\qquad \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-1\\y+4\end{pmatrix}$

$M\in d \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.

$\Leftrightarrow 8(x-1)-2(y+4)=0$

$\Leftrightarrow 8x-8-2y-8=0$

$\Leftrightarrow 8x-2y-16=0$
$\Leftrightarrow 4x-y-8=0$
$(AB):4x-y-8=0$

2. En déduire que les points A, B et C sont alignés.

$C(2;0)$ et $(AB):4x-y-8=0$
$4\times 2-0-8=0$
Donc le point C appartient à la droite (AB) et les points A ; B et C sont alignés.

Exercice 7:

Les équations suivantes sont-elles des équations de droites ? Si oui, donner un vecteur directeur de la droite.

1. $\sqrt{2}x+y+5=0$ est une équation de la forme $ax+by+c=0$ avec $a=\sqrt{2}$ ($\neq 0$) ; $b=1$ et $c=5$ donc c'est une équation cartésienne d'une droite de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\\sqrt{2}\end{pmatrix}$.
2. $\sqrt{2x}+y+5=0$ n'est pas une équation cartésienne d'une droite.
3. $2x+\frac{3}{2y}+4=0$ n'est pas une équation cartésienne d'une droite.
4. $2x+3-2y=5x \Leftrightarrow -3x-2y+3=0$; C'est une équation cartésienne d'une droite de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$.

Exercice 8:

Soit m un réel et d la droite d'équation $x+my+3=0$.
C'est une équation de la forme : $ax+by+c=0$ avec $a=1\neq 0$; $b=m$ et $c=3$
$\vec{v_m}\begin{pmatrix}-m\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d. (Attention ici m n'est pas le coefficient directeur de la droite d).
Peut-on trouver m tel que:

1. $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ soit un vecteur directeur de d.

$\vec{u}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v_m}$ sont colinéaires, c'est à dire :
$3\times 1-(-m)\times 2=0$
$3+2m=0$
$m=\frac{-3}{2}$

2. A(-2;3) appartienne à la droite d.

$A\in d \Leftrightarrow -2+3m+3=0$
$\Leftrightarrow 3m=-1$
$\Leftrightarrow m=\frac{-1}{3}$

3. d soit parallèle à la droite d'équation $3x-y=0$.

On note d_1 la droite d'équation $3x-y=0$. $\vec{w}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d_1.

d et d_1 sont parallèles si et seulement si $\vec{v_m}$ et $\vec{w}$ sont colinéaires, c'est à dire : $-3m-1=0 \Leftrightarrow m=\frac{-1}{3}$

4. d soit parallèle à l'axe des abscisses.

L'axe des abscisses est la droite d'équation $y=0$.
$\vec{i}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de l'axe des abscisses.
d est parallèle à l'axe des abscisses si et seulement si $\vec{v_m}$ et $\vec{i}$ sont colinéaires, c'est à dire : $1-0\times m=0$
Cette équation n'admet pas de solution donc pour toute valeur de m, d n'est pas parallèle à l'axe des abscisses.

5. d soit parallèle à l'axe des ordonnées.

L'axe des ordonnées est la droite d'équation $x=0$.
$\vec{j}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de l'axe des ordonnées.
d est parallèle à l'axe des ordonnées si et seulement si $\vec{v_m}$ et $\vec{j}$ sont colinéaires, c'est à dire : $0\times 1-m\times 1=0 \Leftrightarrow m=0$

6. d passe par l'origine du repère.

$O(0;0)\in d \Leftrightarrow 0+m\times 0+3=0$
Cette équation n'admet pas de solution donc pour toute valeur de m, d ne passe pas par l'origine du repère.

7. d passe par le point J(0;1).

$J(0;1)\in d \Leftrightarrow 0+m\times 1+3=0 \Leftrightarrow m=-3$

Exercice 9:

ABCD est un parallélogramme.
Les points I, J, K et L sont tels que $\vec{AI}=\frac{1}{3}\vec{AB}$, $\vec{BJ}=\frac{1}{3}\vec{BC}$, $\vec{CK}=\frac{1}{3}\vec{CD}$, $\vec{DL}=\frac{1}{3}\vec{DA}$.
1. Décomposer le vecteur $\vec{IJ}$ sur les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{BC}$, et les vecteurs $\vec{LK}$ sur les vecteurs $\vec{AD}$ et $\vec{DC}$.

$\vec{IJ}=\vec{IB}+\vec{BJ}$
$\vec{IJ}=\vec{IA}+\vec{AB}+\frac{1}{3}\vec{BC}$
$\vec{IJ}=\frac{-1}{3}\vec{AB}+\vec{AB}+\frac{1}{3}\vec{BC}$
$\vec{IJ}=\frac{2}{3}\vec{AB}+\frac{1}{3}\vec{BC}$

$\vec{LK}=\vec{LD}+\vec{DK}$
$\vec{LK}=\frac{-1}{3}\vec{DA}+\vec{DC}+\vec{CK}$
$\vec{LK}=\frac{-1}{3}\vec{DA}+\vec{DC}+\frac{1}{3}\vec{CD}$
$\vec{LK}=\frac{1}{3}\vec{AD}+\frac{2}{3}\vec{DC}$

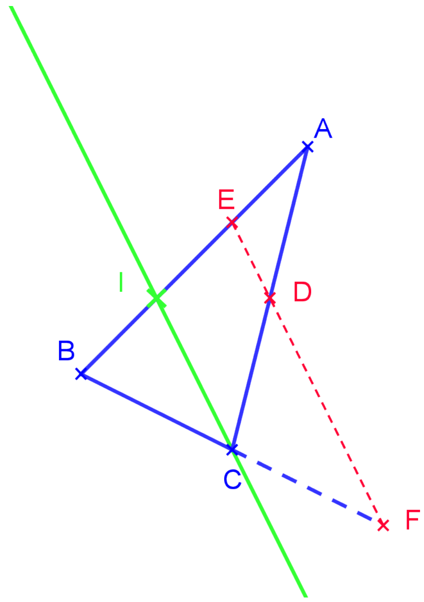
2. Démontrer que IJKL est un parallélogramme.

ABCD est un parallélogramme donc $\vec{AB}=\vec{DC}$ et $\vec{BC}=\vec{AD}$.

Donc, $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{LK}$. Par suite, IJKL est un parallélogramme.

Exercice 10:

Construire un triangle ABC, puis les points D, E et F tels que $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BF}=2\overrightarrow{BC}$.



Le but est de démontrer par trois méthodes différentes que D, E et F sont alignés.

1. **Solution analytique** dans le repère (A; $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$).

a. Déterminer les coordonnées de D, E et F.

$A(0;0)$; $B(1;0)$; $C(0;1)$

$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ donc $D\left(0;\frac{1}{2}\right)$

$\overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ donc $E\left(\frac{1}{3};0\right)$

$\overrightarrow{BF}=2\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{BF}\begin{pmatrix} x_F-1 \\ y_F \end{pmatrix}$ $\qquad$ $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{BF}=2\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \begin{cases} x_F-1=-2 \\ y_F=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_F=-1 \\ y_F=2 \end{cases}$

Donc, $F(-1;2)$

b. Démontrer que D, E, F sont alignés.

Les points D ; E et F sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{DF}$ sont colinéaires.

$\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ $\qquad$ $\overrightarrow{DF}\begin{pmatrix} -1 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$

$\frac{1}{3}\times\frac{3}{2}-(-1)\times\left(\frac{-1}{2}\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0$

Donc, les vecteurs $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{DF}$ sont colinéaires et les points D, E et F sont alignés.

2. Solution vectorielle.

a. Décomposer $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{DF}$ sur $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

$$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AE}=\frac{-1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$$
$$\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}$$
$$\overrightarrow{DF}=\frac{-1}{2}\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BC}$$
$$\overrightarrow{DF}=\frac{-1}{2}\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}+2(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})$$
$$\overrightarrow{DF}=\frac{-1}{2}\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}$$
$$\overrightarrow{DF}=-\overrightarrow{AB}+\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$$

b. Démontrer que D, E et F sont alignés.

On remarque que $\overrightarrow{DF}=-3\overrightarrow{DE}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{DF}$ et $\overrightarrow{DE}$ sont colinéaires et les points E ; D et F sont alignés.

3. <u>Solution géométrique.</u>

La parallèle à (DE) passant par C coupe [AB] en un point I.

a. Démontrer que E est le milieu de [AI].

Dans le triangle ACI
Les droites (CI) et (ED) sont parallèles, D est le milieu de [AC] donc E est le milieu de [IA].

b. En déduire que I est le milieu de [EB].

E est le milieu de [IA] donc $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{EI}$. Or $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.

Donc, $\overrightarrow{IB}=\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{IE}+\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AB}=\frac{-1}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

Donc, $\overrightarrow{IB}=\overrightarrow{EI}$ et I est le milieu de [BE].

c. Démontrer alors que la droite (CI) est parallèle à la droite (EF). Conclure.

Dans le triangle BEF
I est le milieu de [BE] et C est le milieu de [BF] donc (CI) est parallèle à (EF).
Conséquence :
(CI) est parallèle à (ED) et (CI) est parallèle à (EF)
Donc (ED) et (EF) sont parallèles.
Par suite les points E, D et F sont alignés.