Sujet 1

EXERCICE 1 (5 points)

Cet exercice est un QCM et comprend cinq questions.
Pour chacune des questions, une seule des quatre réponses proposées est correcte.
Les questions sont indépendantes.
Pour chaque question, indiquer le numéro de la question et recopier la lettre correspondant à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée, mais il peut être nécessaire d'effectuer des recherches au brouillon pour aider à déterminer votre réponse.
Chaque réponse correcte rapporte un point. Une réponse incorrecte ou une question sans réponse n'apporte ni ne retire aucun point.

Question 1

ABC est un triangle tel que $AB=5$ et $AC=6$ et $\widehat{BAC}=\frac{\pi}{4}$.

Alors $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ est égal à :

a) $15\sqrt{2}$	b) $15\sqrt{3}$	c) $\frac{15}{2}$	d) 15

Question 2

ABCD est un carré de centre O tel que $AB=1$.
Alors $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{OD}$ est égal à :

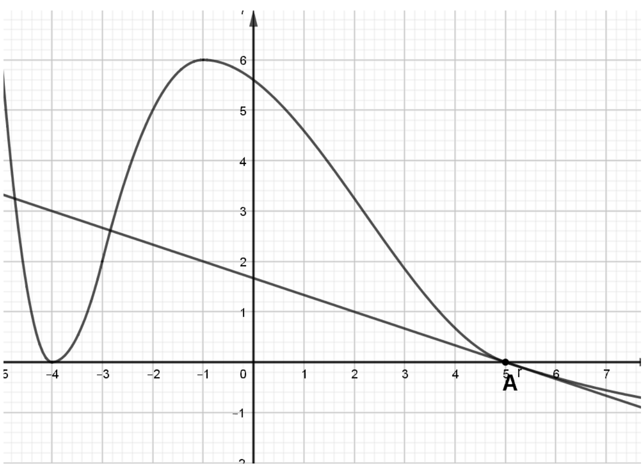
a) 1	b) 0	c) -0.5	d) -1

Question 3

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs orthogonaux tels que $\|\vec{u}\|=2$ et $\|\vec{v}\|=1$.
$(\vec{u}+\vec{v}).(2\vec{u}-\vec{v})$ est égal à :

a) 6	b) 9	c) 13	d) 7

On se place dans un repère orthonormé du plan.
Sur la figure ci-dessous, on a tracé la courbe représentative, notée $\mathscr{C}$, d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.
La droite D est la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point $A(5;0)$.



Question 4

On note f' la fonction dérivée de la fonction f alors $f'(5)$ est égal à :

a) 3	b) -3	c) $\frac{1}{3}$	d) $-\frac{1}{3}$

Question 5

Pour tout réel x de l'intervalle $]-\infty;0]$ on a :

a) $f'(x) \leq 0$	b) $f'(x) \geq 0$	c) $f(x) \geq 0$	d) $f(x) \leq 0$

CORRECTION

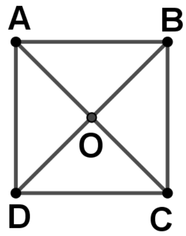
Question 1   Réponse : a

Preuve non demandée

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB\times AC\times\cos(\widehat{BAC})=5\times6\times\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=30\times\frac{\sqrt{2}}{2}=15\sqrt{2}$

Question 2   Réponse : c

Preuve non demandée



$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{BO}$ (car O est le milieu de [BD]).

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{OD}=(-\overrightarrow{BA}).\overrightarrow{BO}=-\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BO}$

BA=AD=1 donc $BD=\sqrt{2}$ et $BO=\frac{\sqrt{2}}{2}$ d'autre part $\widehat{ABD}=\frac{\pi}{4}$.

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{OD}=-\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BO}=-BA\times BO\times\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=-1\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=-1\times\frac{2}{4}=-0{,}5$

Question 3   Réponse : d

Preuve non demandée

$(\vec{u}+\vec{v}).(2\vec{u}-\vec{v})=2\vec{u}^2-\vec{u}.\vec{v}+2\vec{v}.\vec{u}-\vec{v}^2$

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs orthogonaux donc $\vec{u}.\vec{v}=\vec{v}.\vec{u}=0$.

$\vec{u}^2=\|\vec{u}\|^2=2^2=4$ $\vec{v}^2=\|\vec{v}\|^2=1^2=1$

$(\vec{u}+\vec{v}).(2\vec{u}-\vec{v})=2\times4-1=7$

Question 4   Réponse : d

Preuve non demandée

La droite D passe par les points A(5;0) et B(-1;2). Le coefficient directeur de D est :

$\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{2-0}{-1-5}=\frac{2}{-6}=-\frac{1}{3}$.

D est la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point A donc $f'(5)=-\frac{1}{3}$.

Question 5   Réponse : c

Preuve non demandée

Sur $]-\infty;0]$ la courbe $\mathscr{C}$ est au dessus de l'axe des abscisses, donc $f(x)\geqslant0$.

EXERCICE 2 (5 points)

Une entreprise pharmaceutique qui fabrique un soin antipelliculaire.
Elle peut produire entre 200 et 2000 litres de produit par semaine.
Le résultat en dizaines de milliers d'euros, réalisé par la vente de x centaines de litres est donné par la fonction R définie par : $\mathrm{R}(x)=(5x-30)\mathrm{e}^{-0,25x}$ pour tout réel $x\in[2;20]$

1. Calculer le résultat réalisé par la fabrication et la vente de 7 centaines de litres de produit.
On arrondira à l'euro près.

2. Vérifier que pour la fabrication et la vente de 400 litres de produit l'entreprise réalise un résultat négatif (appelé déficit).

3. Résoudre l'inéquation $\mathrm{R}(x)\geqslant 0$, d'inconnue x.
Interpréter dans le contexte de l'exercice.

4. On note R' la dzérivée de la fonction R.
Un logiciel de calcul formel donné : $\mathrm{R}'(x)=(-1,25x+12,5)\mathrm{e}^{-0,25x}$.
En déduire la quantité de produit que l'entreprise doit produire et vendre pour réaliser le résultat maximal.

CORRECTION

1. $\mathrm{R}(7)=5\,\mathrm{e}^{-1,75}=0{,}8689$ à 10^{-4} près. Soit $8689\,€$ à l'euro près.

2. $\mathrm{R}(4)=-10\,\mathrm{e}^{-1}=-3{,}6788$ à 10^{-4} près. Soit $-36788\,€$ à l'euro près.

3. $x\in[2\,;20]$

$\mathrm{R}(x)\geqslant 0 \quad\Leftrightarrow\quad (5x-30)\mathrm{e}^{-0,25} \quad\Leftrightarrow\quad 5x-30\geqslant 0$ car pour tout nombre réel x $\mathrm{e}^{-0,25}>0$.

$\mathrm{R}(x)\geqslant 0 \quad\Leftrightarrow\quad 5x-30\geqslant 0 \quad\Leftrightarrow\quad x\geqslant 6$

$\mathscr{A}=[6;20]$

Pour avoir un résultat positif c'est à dire un bénéfice, il faut produire de 600 à 2000 litres de produit.

4. Pour tout nombre réel x de l'intervalle [2;20], $\mathrm{e}^{-0,25x}>0$.

$\mathrm{R}'(x)=0 \quad\Leftrightarrow\quad (-1{,}25x+12{,}5)\mathrm{e}^{-0,25x}=0 \quad\Leftrightarrow\quad -1{,}25x+12{,}5=0 \quad\Leftrightarrow\quad x=\dfrac{12{,}5}{1{,}25}=10$

$\mathrm{R}'(x)>0 \quad\Leftrightarrow\quad -1{,}25x+12{,}5>0 \quad\Leftrightarrow\quad 2\leqslant x<10$

$\mathrm{R}'(x)<0 \quad\Leftrightarrow\quad -1{,}25x+12{,}5<0 \quad\Leftrightarrow\quad 10<x\leqslant 12{,}5$

Tableau de variations

x	2		10		20
R '(x)		+	0	–	
R(x)		↗	R(10)	↘	

Le résultat maximal est $\mathrm{R}(10)=20\,\mathrm{e}^{-2,5}=1{,}6417$ (à 10^{-4} près). Soit un bénéfice de 16417 €.

EXERCICE 3 (5 points)

Lors du lancement d'un hebdomadaire, 1200 exemplaires ont été vendus.
Un e étude de marché prévoit une progression de ventes de $2\,\%$ chaque année.
On modélise le nombre d'hebdomadaires vendus par une suite (u_n) où u_n représente le nombre de journaux vendus durant la $n^{\text{ième}}$ semaine après le début de l'opération.
On a donc $u_0=1200$.

1. Calculer le nombre u_2. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

2. Écrire, pour tout entier naturel n, l'expression de u_n en fonction de n.

3. Voici un programme rédigé en Python :

```
def Suite():
  u=1200
  s=1200
  n=0
  while s<30000:
    n=n+1
    u=u*1.02
    s=s+u
  return (n)
```

Le programme retourne la valeur 20.
Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

4. Déterminer le nombre total d'hebdomadaires vendus au bout d'un an.

CORRECTION

1. Il y a une progression des ventes de 2 % chaque année donc :

$u_1 = u_0 + \frac{2}{10} \times u_0 = 1200 + \frac{2}{100} \times 1200 = 1224$

$u_2 = u_1 + \frac{2}{100} u_1 = 1224 + \frac{2}{100} \times 124 = 1248{,}48$

Le nombre d'hebdomadaires vendus la 2ème semaine après le lancement de 1248.

2. Pour tout entier naturel n :

$u_{n+1} = u_n + \frac{2}{100} \times u_n = u_n + 0{,}02 \times u_n = (1 + 0{,}02) u_n = 1{,}02\, u_n$

(u_n) est la suite géométrique de premier $u_0 = 1200$ et de raison $q = 1{,}02$.

donc $u_n = u_0 \times q^n = 1200 \times 1{,}02^n$.

3. Le programme retourne 20 donc le nombre total des journaux vendus pendant les 20 premières semaines après le lancement est supérieur à 30000.

4. $u_0 = 1200$ est le nombre de journaux vendus pendant la semaine 0.

Une année correspond à 52 semaines.

Le nombre total d'hebdomadaires vendus au bout d'un an est $S = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$.

$qS = u_1 + u_2 + \ldots + u_{52}$ $\qquad qS - S = u_{52} - u_0$

$(q-1)S = (1{,}02 - 1)S = u_0 \times 1{,}02^{52} - u_0$

$0{,}02\, S = 1200 \times (1{,}02^{52} - 1)$

$S = 1200 \times \frac{1{,}02^{52} - 1}{0{,}02} = 108012{,}69$.

Le nombre total d'hebdomadaires vendus au bout d'un an est : 108013.

EXERCICE 4 (5 points)

Une agence de voyage propose deux formules week-end pour se rendre à Londres au départ de Nantes.
Les clients choisissent leur moyen de transport : train ou avion.
De plus, s'ils le souhaitent, ils peuvent compléter une formule pour l'option « visites guidées ».

Une étude a produit les données suivantes :
. 40 % des clients optent pour l'avion ;
. parmi les clients ayant choisi le train, 50 % choisissent aussi l'option « visites guidées ».
. 12 % des clients ont choisi à la fois l'avion et l'option « visites guidées ».

On considère les événements suivants :
A : « le client a choisi l'avion » ;
V : « le client a choisi l'option « visites guidées ».

1. Déterminer $P_A(V)$.

2. Démontrer que la probabilité pour que le client interrogé ont choisi l'option « visites guidées » est égale à 0,42.

3. Calculer la probabilité que le client interrogé ait pris l'avion sachant qu'il n'a pas choisi l'option « visites guidées ». Arrondir le résultat au centième.

4. On interroge au hasard deux clients de manière aléatoire et indépendante .
Quelle est la probabilité qu'aucun des deux ne prennent l'option « visites guidées » ?

CORRECTION

L'énoncé précise :

. 40 % des clients optent pour l'avion donc $P(A)=\frac{40}{100}=0,4$.

$\bar{A}$: « le client a choisi le train » donc $P(\bar{A})=1-P(A)=1-0,4=0,6$.

. Parmi les clients ayant choisi le train, 50 % choisissent aussi l'option « visites guidées »

donc $P_{\bar{A}}(V)=\frac{50}{100}=0,5$ et $P_{\bar{A}}(\bar{V})=1-P_{\bar{A}}(V)=1-0,5=0,5$.

. 12 % des clients ont choisi à la fois l'avion et l'option « visites guidées » donc $P(A\cap V)=0,12$.

1. $P_A(V)=\frac{P(A\cap V)}{P(A)}=\frac{0,12}{0,4}=0,3$.

2. En utilisant la formule des probabilités totales :

$P(V)=P(A\cap V)+P(\bar{A}\cap V)=0,12+P(\bar{A})\times P_{\bar{A}}(V)=0,12+0,6\times 0,5=0,12+0,3=0,42$.

3. On nous demande de calculer : $P_{\bar{V}}(A)=\frac{P(\bar{V}\cap A)}{P(\bar{V})}$.

$P(\bar{V})=1-P(V)=1-0,42=0,58$

$P_A(\bar{V})=1-P_A(V)=1-0,3=0,7$ $\quad$ $P(A\cap\bar{V})=P(A)\times P_A(\bar{V})=0,4\times 0,7=0,28$

$P_{\bar{V}}(A)=\frac{0,28}{0,58}=\frac{28}{58}=\frac{14}{29}=0,48$ au centième près.

4. $P(\bar{V})=0,58$.

On choisit au hasard deux clients de manière aléatoire et indépendante, la probabilité qu'aucun des deux ne prennent l'option « visites guidées » est égale à $0,58^2=0,34$ au centième près.