Sujet 10

EXERCICE 1 (5 points)

Cet exercice est un QCM et comprend cinq questions.
Pour chacune des questions, une seule des quatre réponses proposées est correcte.
Les questions sont indépendantes.
Pour chaque question, indiquer le numéro de la question et recopier la lettre correspondant à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée, mais il peut être nécessaire d'effectuer des recherches au brouillon pour aider à déterminer votre réponse.
Chaque réponse correcte rapporte un point. Une réponse incorrecte ou une question sans réponse n'apporte ni ne retire aucun point.

Question 1

Lors d'une même expérience aléatoire, deux événements A et B vérifiant :
$P(A)=0,4$ $P(B)=0,6$ et $P(A\cap\bar{B})=0,3$
Alors

a) $P(A\cap B)=0.1$	b) $P(A\cap B)=0.24$	c) $P(A\cup B)=1$	d) $P(A\cup B)=0.7$

Question 2

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2-3x+4$. L'abscisse du minimum est :

a) $-\frac{3}{2}$	b) $\frac{2}{3}$	c) $\frac{3}{2}$	d) 1

Question 3

Soit (u_n) une suite arithmétique telle que $u_5=26$ et $u_9=8$. La raison de (u_n) vaut :

a) -18	b) $\frac{8}{26}$	c) 4.5	d) - 4.5

Question 4

On considère l'algorithme suivant, écrit en langage usuel :

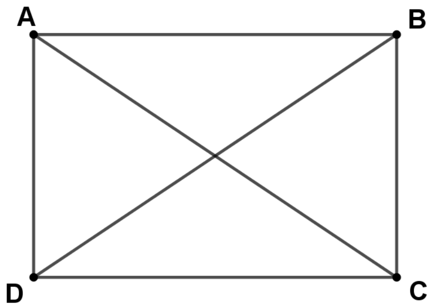
```
Suite(N)
  A ← 10
  Pour k de 1 à N
    A ← 2*A-4
  Fin Pour
  Renvoyer A
```

Pour N=4 le résultat affiché sera :

a) 4	b) 100	c) 52	d) 196

Question 5

On considère un rectangle ABCD tel que AB=3 et AD=2.



Alors le produit scalaire $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB}$ vaut :

a) 0	b) 5	c) 6	d) - 6

CORRECTION

Question 1 Réponse : a

Preuve non demandée

En utilisant la formule des probabilités totales :

$P(A)=P(A\cap B)+P(A\cap\overline{B})$

$0{,}4=P(A\cap B)+0{,}3 \quad \Leftrightarrow \quad P(A\cap B)=0{,}1$

Question 2 Réponse : c

Preuve non demandée

$f(x)=x^2-3x+4$ Le coefficient de x^2 est positif donc f admet un minimum.

$f'(x)=2x-3 \qquad f'(x)=0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x-3=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=\frac{3}{2}$

Question 3 Réponse : d

Preuve non demandée

Pour tout entier naturel n, $u_n=u_0+nr$.

$u_5=u_0+5r=26 \qquad u_9=u_0+9r=8 \qquad u_9-u_5=u_0+9r-u_0-5r=4r=8-26=-18$

Donc $r=-\frac{18}{4}-4{,}5$

Question 4 Réponse : b

Preuve non demandée

$1^{\text{ère}}$ boucle $k=1$ $A=16$

$2^{\text{ème}}$ boucle $k=2$ $A=28$

$3^{\text{ème}}$ boucle $k=3$ $A=52$

$4^{\text{ème}}$ boucle $k=4$ $A=100$

On propose une écriture du programme donné en langage Python.

```
def Suite(N):
  A=10
  for k in range(N):
    A=2*A-4
  return A
print(Suite(4))
```

Question 5 Réponse : b

Preuve non demandée

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB} \qquad \overrightarrow{DB}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}$

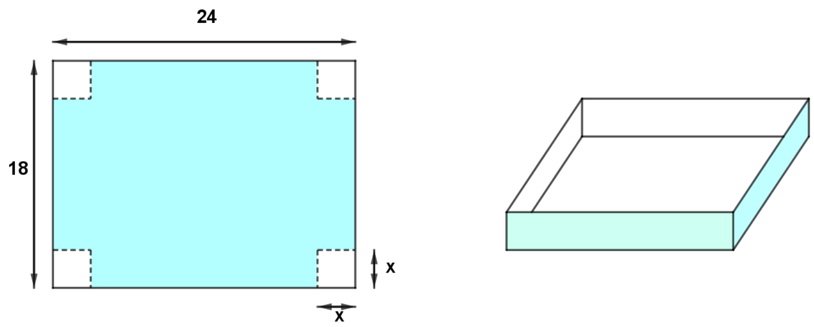
$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB}=(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}).(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC})=\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DC}$

$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB}=-AD^2+0+0+AB^2=-4+9=5$

Car les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DA}$ sont orthogonaux et les vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont orthogonaux et $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$.

EXERCICE 2 (5 points)

Un industriel souhaite fabriquer une boîte sans couvercle à partir d'une plaque rectangulaire de métal de 18 cm de largeur et 24 cm de longueur. Pour cela, il enlève des carrés dont la longueur des côtés mesure x cm aux quatre coins de la pièce de métal et relève ensuite verticalement pour fermer les côtés.



Le volume de la boîte ainsi obtenue est une fonction définie sur l'intervalle [0;9] notée V(x).

1. Justifier que pour tout réel x appartenant à [0;9] :
$V(x)=4x^3-84x^2+432x$

2. On note V' la fonction dérivée de V sur [0:9].
Donner l'expression de $V'(x)$ en fonction de x.

3. Dresser alors le tableau de variations de V en détaillant la démarche.

4. Pour quelle(s) valeur(s) de x la contenance de la boîte est-elle maximale ?

5. L'industriel peut-il construire ainsi une boîte dont la contenance est supérieure ou égale à 650 cm³ ? Justifier.

CORRECTION

1. Pour tout nombre réel x de l'intervalle [0;9], la base de la boîte est un rectangle de longueur (24-2x) cm et de largeur (18-2x) cm.

L'aire de la base est : $(24-2x)\times(18-2x)$ cm^2.

$(24-2x)\times(18-2x)=24\times18-36x-48x+4x^2=4x^2-84x+432$.

La boîte est un parallélépipède rectangle de hauteur x cm.

Le volume de la boîte en cm³ est :

$V(x)=(4x^2-84x+432)\times x \ =4x^3-84x^2+432x$.

2. $V'(x)=4\times(3x^2)-84\times(2x)+432=12x^2-168x+432$

3. $V'(x)=12x^2-168x+432=12(x^2-14x+36)$.

Le signe de $V'(x)$ est le signe du trinôme $T(x)=x^2-14x+36$ sur l'intervalle [0;9].

$T(x)=x^2-14x+36 \quad \Delta=(-14)^2-4\times36=196-144=52=4\times13>0 \quad \sqrt{\Delta}=\sqrt{4\times13}=2\sqrt{13}$

$x_1=\dfrac{14-2\sqrt{13}}{2}=7-\sqrt{13} \quad x_2=\dfrac{14+2\sqrt{13}}{2}=7+\sqrt{13} \quad 0<x_1<9$ et $9<x_2$.

Pour le trinôme T(x) le coefficient de x^2 est strictement positif.

Signe de T(x)

x	-∞	0		x_1		9		x_2		-∞
T(x)	+		+	0	−		−	0	+	

Tableau de variations de la fonction V.

x	0		x_1		9
V '(x)		+	0	−	
V(x)	0	↗	f(x_1)	↘	0

V(0)=0 $\quad V(9)=4\times9^3-84\times9^2+432\times9=2916-6804+3888=0$

4. Le volume de la boîte est maximal pour $x=x_1=7-\sqrt{13}$.

5. $x_1^2=(7-\sqrt{13})^2=49-14\sqrt{13}+13=62-14\sqrt{13}$

$x_1^3=(62-14\sqrt{13})(7-\sqrt{13})=434-98\sqrt{13}-62\sqrt{13}+182=616-160\sqrt{13}$

$V(x_1)=4\times(616-160\sqrt{13})-84\times(62-14\sqrt{13})+432\times(7-\sqrt{13})$

$V(x_1)\ =2464-640\sqrt{13}-5208+1176\sqrt{13}+3024-432\sqrt{13}=280+104\sqrt{13}$

$V(x_1)=654{,}98$ à 10^{-2} près.

Le maximum de la fonction V est strictement supérieur à 650 donc l'industriel peut construite une boîte de contenance supérieure ou égale à 650 cm³.

EXERCICE 3 (5 points)

Une angine peut-être provoquée par une bactérie (angine bactérienne) soit par un virus (angine virale).
On admet qu'un malade ne peut-être à la fois porteur du virus et de la bactérie.
L'angine est bactérienne dans 20 % des cas.
Pour déterminer si une angine est bactérienne, on dispose d'un test. Le résultat du test peut-être positif ou négatif. Le test est conçu pour être positif lorsque l'angine est bactérienne mais il présente des risques d'erreur :
. si l'angine est bactérienne, le test est négatif dans 30 % des cas ;
. si l'angine est virale, le test est positif dans 10 % des cas.

On choisit au hasard un malade atteint d'angine.
On note :
. l'événement : « l'angine est bactérienne » ;
. l'événement : « le test effectué sur le malade est positif ».

Si besoin, les résultats seront arrondis à 10^{-3} près.

1. Représenter la situation, par un arbre pondéré.

2. Quelle est la probabilité que l'angine soit bactérienne et le test soit positif ?

3. Montrer que la probabilité que le test soit positif est 0,22.

4. Un malade est choisi au hasard parmi ceux dont le test positif.
Quelle est la probabilité pour que son angine soit bactérienne ?

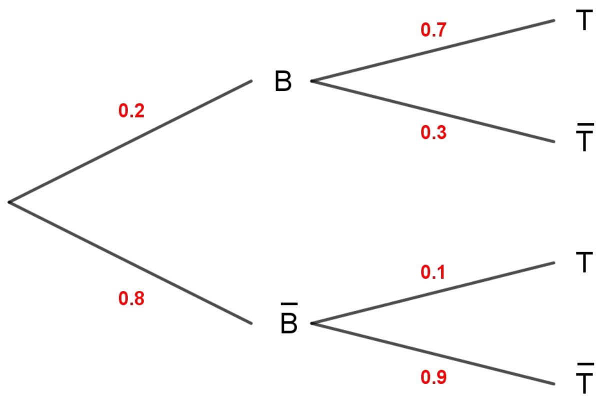
CORRECTION

1. L'angine est bactérienne dans 20 % des cas donc $P(B)=\frac{20}{100}=0,2$.

$\bar{B}$ est l'événement : « l'angine est virale ».

$P(\bar{B})=1-P(B)=1-0,2=0,8$.

- Si l'angine est bactérienne, le test est négatif dans 30 % des cas donc $P_B(\bar{T})=0,3$ et $P_B(T)=1-P_B(\bar{T})=1-0,3=0,7$.
- si l'angine est virale, le test est positif dans 10 % des cas donc $P_{\bar{B}}(T)=0,1$ et $P_{\bar{B}}(\bar{T})=1-P_{\bar{B}}(T)=1-0,1=0,9$.
- Arbre pondéré, représentant la situation.



2. $P(B\cap T)=P(B)\times P_B(T)=0,2\times 0,7=0,14$

3. En utilisant la formule des probabilités totales.

$P(T)=P(T\cap B)+P(T\cap\bar{B})=0,14+P(\bar{B})\times P_{\bar{B}}(T)=0,14+0,8\times 0,1$

$P(T)=0,14+0,08=0,22$.

4. $P_T(B)=\frac{P(B\cap T)}{P(T)}=\frac{0,14}{0,22}=\frac{14}{22}=\frac{7}{11}=0,636$ à 10^{-3} près.

EXERCICE 4 (5 points)

Un service vidéos à la demande réfléchit au lancement d'une nouvelle série mise en ligne chaque semaine et qui aurait comme sujet le quotidien de jeunes gens favorisés.
Le nombre de visionnages estimé la première semaine est de 120000.
Ce nombre augmenterait ensuite de 2 % chaque semaine.
Les dirigeants souhaiteraient obtenir au moins 400000 voisinages par semaine.
On modélise cette situation par une suite (u_n) où u_n représente le nombre de voisinages n semaines après le début de la diffusion. On a donc $u_0=120000$.

1. Calculer le nombre u_1 de voisinages une semaine après le début de la diffusion.

2. Justifier que pour tout entier naturel n : $u_n=120000\times 1{,}02^n$.

3. À partir de combien de semaines le nombres de voisinages hebdomadaires sera-t-il supérieur à 150000 ?

4. Voici un algorithme en langage Python :

```
def seuil():
  u=120000
  n=0
  while u<400000:
    n=n+1
    u=1.02*u
  return n
```

Déterminer la valeur affichée par cet algorithme et interpréter le résultat précédent dans le contexte de l'exercice.

5. On pose pour tout entier naturel n : $S_n=u_0+u_1+\ldots+u_n$.
Montrer que l'on a : $S_n=6000000\times(1{,}02^n-1)$.
Puis en déduire le nombre total de voisinages au bout de 52 semaines (arrondir à l'unité).

CORRECTION

1. Au bout d'une semaine le nombre de visionnages augmente de 2 % donc :
$u_1=u_0+\frac{2}{100}\times u_0=120000+0,02\times 120000=120000+2400=122400$.

2. Pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=u_n+\frac{2}{100}\times u_n$ car le nombre de visionnages augmente de 2 % chaque semaine.
$u_{n+1}=u_n+0,02\times u_n=1,02\times u_n$.
La suite (u_n) est la suite géométrique de premier terme $u_0=120000$ et de raison $q=1,02$.
Pour tout entier naturel n, $u_n=120000\times 1,02^n$.

3. On remarque que la suite (u_n) est croissante.
Par balayage, avec la calculatrice, on obtient :
$u_{11}=393723,69$ arrondi à 10^{-2}.
$u_{12}=152189,02$ arrondi à 10^{-2}.
Au bout de 13 semaines, le nombre de voisinages hebdomadaires sera supérieur à 150000.
u_{12} est le nombre de visionnages hebdomadaires la treizième semaine.

4. La valeur affichée par cet algorithme est le nombre de semaines nécessaires pour obtenir un nombre de visionnages hebdomadaires supérieur ou égal à 400000.
Si on exécute le programme, on obtient : 61.
Ou on continue le balayage avec la calculatrice
$u_{60}=393723,69$ arrondi à 10^{-2}.
$u_{61}=401598,17$ arrondi à 10^{-2}.
Le nombre de visionnages hebdomadaires sera supérieur ou égal à 400000 au bout de 62 semaines.

5. Pour tout entier naturel n :
$S_n=u_0+u_1+\ldots+u_n$ $\quad qS_n=u_1+u_2+\ldots+u_n+u_{n+1}$ $\quad qS_n-S_n=(q-1)S_n=u_{n+1}-u_0$
$q=1,02$ $\quad q-1=0,02$ $\quad u_0=120000$ $\quad u_{n+1}=120000\times 1,02^{n+1}$
$0,02\times S_n=120000\times 1,02^{n+1}-120000 \Leftrightarrow 0,02\times S_n=120000\times(1,02^{n+1}-1)$
$\Leftrightarrow S_n=\frac{120000}{0,02}\times(1,02^{n+1}-1) \Leftrightarrow S_n=6000000\times(1,02^{n+1}-1)$;
Le nombre total de visionnages hebdomadaires au bout de 52 semaines est S_{51}.
$S_{51}=6000000\times(1,02^{52}-1)=10801969$ arrondi à l'unité.