Sujet 11

EXERCICE 1 (5 points)

Cet exercice est un QCM et comprend cinq questions.
Pour chacune des questions, une seule des quatre réponses proposées est correcte.
Les questions sont indépendantes.
Pour chaque question, indiquer le numéro de la question et recopier la lettre correspondant à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée, mais il peut être nécessaire d'effectuer des recherches au brouillon pour aider à déterminer votre réponse.
Chaque réponse correcte rapporte un point. Une réponse incorrecte ou une question sans réponse n'apporte ni ne retire aucun point.

Une urne contient 150 jetons rouges et 50 jetons bleus, tous indiscernables au toucher, 20 % des jetons rouges sont gagnants et 40 % des jetons bleus sont gagnants.
Un joueur tire au hasard un jeton de l'urne.

Question 1
La probabilité que le jeton soit rouge et gagnant est :

a) 0.2	b) 0.45	c) 0.15	d) 0.95

Question 2
La probabilité que le jeton soit gagnant est :

a) 0.2	b) 0.6	c) 0.25	d) 0.4

Question 3
Un joueur tire successivement et avec remise deux jetons de l'urne. La probabilité qu'il tire deux jetons rouges est :

a) 0.5625	b) 0.75	c) 0.30	d) 0.15

On note X la variable aléatoire qui représente le gain algébrique, en euros, d'un joueur.
La loi de de probabilité est donnée par le tableau suivant :

Valeurs a prises par X	-5	0	10
P(X=a)	0.6	0.15	0.25

Question 4

a) 0.15	b) 0.6	c) 10	d) 0.25

La probabilité P(X>0) est égale à :

Question 5
Le gain algébrique moyen, en euros, que peut espérer un joueur est égal à :

a) 0	b) -0.5	c) $\frac{5}{3}$	d) 5

CORRECTION

On note : R : l'événement « le joueur tire un jeton rouge » ;
B : l'événement « le joueur tire un jeton bleu » ;
G : l'événement « le joueur tire un jeton gagnant ».

Il y a 150 jetons rouges parmi les 200 jetons de l'urne et 50 jetons bleus, donc :

$P(G)=\frac{150}{200}=0{,}75$ et $P(B)=\frac{50}{200}=025$ $\quad (B=\bar{R})$.

20 % des jetons rouges sont gagnants donc $P_R(G)=0{,}2$.

40 % des jetons bleus sont gagnants donc $P_B(G)=0{,}4$.

Question 1 Réponse : c

Preuve non demandée

$P(R\cap G)=P(R)\times P_R(G)=0{,}75\times 0{,}2=0{,}15$

Question 2 Réponse : c

Preuve nondemandée

En utilisant la formule des probabilités totales.

$P(G)=P(R\cap G)+P(B\cap G)=0{,}15+P(B)\times P_B(G)=0{,}15+0{,}25\times 0{,}4=0{,}15+0{,}1$

$P(G)=0{,}25$

Question 3 Réponse : a

Preuve non demandée

Les tirages des deux jetons sont successifs avec remise, sont donc indépendants.

La probabilité de tirer deux jetons rouges est égal à $(P(R))^2=0{,}75^2=0{,}5625$.

Question 4 Réponse : d

Preuve non demandée

La seule valeur de a strictement positive est 10, donc :

$P(X>0)=P(X=10)=0{,}25$.

Question 5 Réponse : b

Preuve non demandée

$E(X)=-5\times 0{,}6+0\times 0{,}15+10\times 0{,}25=-3+2{,}5=-0{,}5$

E(X)=-0,5 est le gain algébrique, en euros, que peut espérer gagner le joueur.

EXERCICE 2 (5 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.
On considère les points A(-1 ;-3), B(1;2) et C(7;1).

1. Le triangle ABC est-il isocèle en B ?

2. Déterminer la valeur arrondie au dixième de degré de l'angle $\widehat{ABC}$.

3. On considère le point H de coordonnées (2,6 ;-1,2)
Le point H est-il le projeté orthogonal du point B sur la droite (AC) ?

CORRECTION

1. $\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}-2\\-5\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}6\\-1\end{pmatrix}$

$BA^2=(-2)^2+(-5)^2=4+25=29 \quad \Leftrightarrow \quad BA=\sqrt{29}$

$BC^2=6^2+(-1)^2=36+1=37 \quad \Leftrightarrow \quad BC=\sqrt{37}$

$BA\neq BC$ Le triangle ABC n'est pas isocèle en B.

2. $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=-2\times 6-5\times(-1)=-12+5=-7$

$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=BA\times BC\times\cos(\widehat{ABC})=\sqrt{29}\times\sqrt{37}\times\cos(\widehat{ABC})$

donc $\cos(\widehat{ABC})=\dfrac{-7}{\sqrt{29}\times\sqrt{37}}$.

En utilisant la calculatrice, on obtient : $\widehat{ABC}=102,3°$.

3. H est le projeté orthogonal de B sur la droite (AC) si et seulement si $\overrightarrow{BH}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux **et** H appartient à la droite (AC).

$\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix}1,6\\-3,2\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}8\\4\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC}=1,6\times 6-3,2\times 4=12,8-12,8=0$ $\quad\overrightarrow{BH}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux.

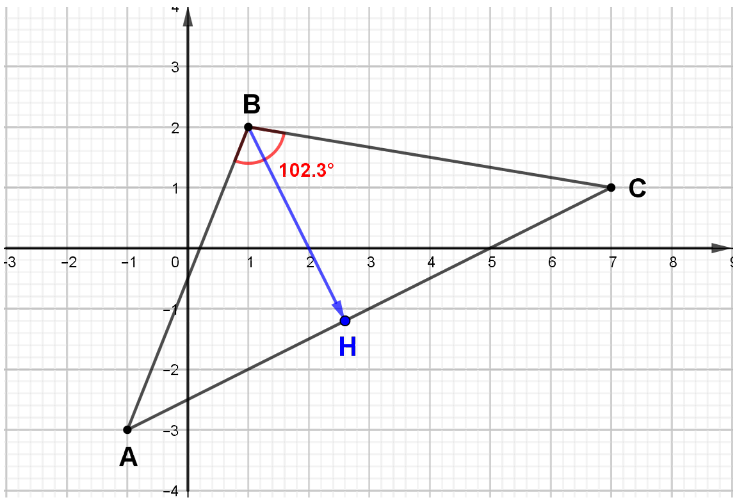
H appartient à la droite (AC) si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

$\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix}3,6\\1,8\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}8\\4\end{pmatrix}$

$\det(\overrightarrow{AH};\overrightarrow{AC})=\begin{vmatrix}3,6 & 8\\1,8 & 4\end{vmatrix}=3,6\times 8-3,2\times 4=14,4-14,4=0$ H appartient à la droite (AC).

Le point H est le projeté orthogonal de B sur la droite (AC).

Figure non demandée



EXERCICE 3 (5 points)

En 2002, Camille a acheté une voiture, son prix était alors de 10500€. La valeur de cette voiture a baissé de 14 % par an.

1. La valeur de cette voiture est modélisée par une suite.
On note P_n la valeur de la voiture de l'année 2002 + n. On a donc $P_0=10500$.

1.a. Déterminer la nature de la suite (P_n).

1.b. Quelle était la valeur de cette voiture en 2010 ?

2. Camille aimerait savoir à partir de quelle année la valeur de sa voiture est inférieure à 1500€.
Pour l'aider, on réalise le programme Python incomplet ci-dessous.

2.a. Recopier et compléter sur votre copie les deux parties en pointillé du progamme ci-dessous.

```
def algo():
  P=10500
  n=2002
  while P . . . :
    P= . . . . .
    n=n+1
  return(n)
print(algo())
```

2.b. Donner la valeur renvoyée par ce programme.

CORRECTION

1.a. Pour tout entier naturel, P_{n+1} est la valeur, en euros,de la voiture en (2002+n+1), cette valeur est égale à P_n diminuée de 14 % de P_n.

$P_{n+1}=P_n-\frac{14}{100}\times P_n=P_n-0{,}14\,P_n=(1-0{,}14)\,P_n=0{,}86\,P_n$.

(P_n) est la suite géométrique de premier terme $P_0=10500$ et de raison $q=0{,}86$.

1.b. 2010=2002+8

Pour tout entier naturel n, $P_n=P_0\times q^n=10500\times 0{,}86^n$.

Donc $P_8=10500\times 0{,}86^8=3141{,}79$

La valeur de l'automobile en 2010 est 3141,79€.

2.a.

```
def algo():
  P=10500
  n=2002
  while P>=1500 :
    P= 0.86*P
    n=n+1
  return(n)
print(algo())
```

2.b. Si on exécute le programme, on obtient 2015, (valeur renvoyée par le programme).

En 2015 la valeur de la voiture sera inférieure, pour la première année à 1500€.

Si on utilise la calculatrice, on obtient :

$P_{12}=1718{,}58$ $\quad P_{13}=1477{,}98$.

2002+13=2015.

EXERCICE 4 (5 points)

Une entreprise fabrique un engrais biologique. Chaque jour, le volume d'engrais fabriqué est compris entre 5 m^3 et 60 m^3.
Le coût moyen quotidien de production, exprimé **en centaines euros**, est modélisé par la fonction f définie sur l'intervalle [5;60] par : $f(x)=\frac{x^2-15x+400}{x}$ où x est le volume quotidien d'engrais fabriqué, exprimé en m^3.

1. Déterminer le coût moyen quotidien pour la production de 5 m^3 d'engrais.

2. Quels volumes d'engrais faut-il fabriquer pour avoir un coût moyen quotidien de production égal à 4300€ (43 centaines d'euros).

3. Pour quel volume d'engrais fabriqué le coût moyen quotidien de production est-il minimal ?
Déterminer ce coût moyen minimal.

CORRECTION

1. Pour $x \in [5;60]$ $\quad f(x)=\dfrac{x^2-15x+400}{x}$.

$$f(5)=\frac{5^2-15\times 5+400}{5}=\frac{25-75+400}{5}=\frac{350}{5}=70 \text{ (centaines d'euros).}$$

Le coût moyen quotidien pour le production de 5 m³ d'engrais est : 7000€.

2. $x \in [5;60]$

$$f(x)=43 \Leftrightarrow \frac{x^2-15x+400}{x}=43 \Leftrightarrow x^2-15x+400=43x \Leftrightarrow x^2-58x+400=0$$

$$\Delta=58^2-4\times 400=3364-1600=1764=42^2$$

$$x_1=\frac{58-42}{2}=\frac{16}{2}=8 \qquad x_2=\frac{58+42}{2}=50$$

$8 \in [5;60]$ $\qquad 50 \in [5;60]$

Pour avoir un coût moyen quotidien de production de 4300€, il faut produire 8 m³ ou 50 m³ d'engrais.

3. On détermine les variations de f.

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'\times v-u\times v'}{v^2}$$

$u(x)=x^2-15x+400 \qquad u'(x)=2x-15$

$v(x)=x \qquad v'(x)=1$

$$f'(x)=\frac{(2x-15)\times x-(x^2-15x+400)\times 1}{x^2}=\frac{2x^2-15x-x^2+15x-400}{x^2}=\frac{x^2-400}{x^2}=\frac{(x-20)(x+20)}{x^2}$$

Pour tout nombre réel x de l'intervalle [5;60] $x+20>0$ donc le signe de $f'(x)$ sur [5;60] et le signe de (x-20).

Tableau de variations de f.

x	5		20		60
f '(x)		−	0	+	
f(x)		↘		↗	

Pour un volume de 20 m³ le coût moyen quotidien de production est minimal.

$$f(20)=20^2-15\times 20+400\times 20=\frac{500}{20}=25$$

Le coût moyen quotidien de production minimale est égal à 2500€.