Sujet 12

EXERCICE 1 (5 points)

Cet exercice est un QCM et comprend cinq questions.
Pour chacune des questions, une seule des quatre réponses proposées est correcte.
Les questions sont indépendantes.
Pour chaque question, indiquer le numéro de la question et recopier la lettre correspondant à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée, mais il peut être nécessaire d'effectuer des recherches au brouillon pour aider à déterminer votre réponse.
Chaque réponse correcte rapporte un point. Une réponse incorrecte ou une question sans réponse n'apporte ni ne retire aucun point.

Question 1
Quelle est la forme factorisée de $f(x)=0,5(x-2)^2-8$?

A)	$0.5x^2-2x-6$	C)	0.5(x+10)(x-6)
B)	0.5(x-6)(x+2)	D)	0.5(x-10)(x+6)

Question 2
(u_n) est une suite arithmétique de raison $r=0,5$ telle que $u_{10}=-4$. Quelle est la valeur du terme u_2 ?

A)	8	B)	0	C)	-10	D)	-8

Question 3
Soit la fonction f définie pour tout $x\neq 2$ par $f(x)=\dfrac{2x-1}{x+2}$.
Parmi les expression suivantes, laquelle définit la dérivée f' de la fonction f sur $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$?

A)	$f'(x)=-\dfrac{5}{(x+2)^2}$	C)	$f'(x)=\dfrac{3}{(x+2)^2}$
B)	$f'(x)=\dfrac{5}{(x+2)^2}$	D)	$f'(x)=2$

Question 4
On se place dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$. Laquelle de ces équations est une équation cartésienne de la droite Δ de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ et passant par le point $A(-1;3)$?

A)	2x-y+1=0	C)	x+2y+1=0
B)	-x+2y-7=0	D)	-2x-y+1=0

Question 5
On se place dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$. Parmi ces propositions, quelle est l'équation cartésienne du cercle de centre $A(2;4)$ et de rayon 3 ?

A)	$(x-2)^2+(y-4)^2=3$	C)	$x^2+y^2-4x-8y+11=0$
B)	$(x+2)^2+(y+4)^2=9$	D)	$x^2+y^2+11=0$

CORRECTION

Question 1 Réponse : B

Preuve non demandée

$f(x)=0,5(x-2)^2-8=0,5[(x-2)^2-16]=0,5[(x-2)^2-4^2]=0,5[(x-2-4)(x-2+4)]$

$f(x)=0,5(x-6)(x+2)$

Question 2 Réponse : D

Preuve non demandée

(u_n) est une suite arithmétique de raison 0,5.

Pour tout entier naturel n, $u_n=u_0+nr=u_0+0,5n$

$u_2=u_0+0,5\times 2 \Leftrightarrow u_0=u_2-0,5\times 2$ et $u_n=u_2-0,5\times 2+0,5n=u_2+0,5\times(n-2)$

Pour $n=10$ $u_{10}=-4=u_2-0,5\times 8 \Leftrightarrow u_2=-4-4=-8$

Question 3 Réponse : B

Preuve non demandée

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'\times v-u\times v'}{v^2}$$

$u(x)=2x-1$ $u'(x)=2$

$v(x)=x+2$ $v'(x)=1$

$$f'(x)=\frac{2\times(x+2)-(2x-1)\times 1}{(x+2)^2}=\frac{2x+4-2x+1}{(x+2)^2}=\frac{5}{(x+2)^2}$$

Question 4 Réponse : D

Preuve non demandée

$M(x;y)$ $A(-1;3)$ $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x+1\\y-3\end{pmatrix}$ $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$

M appartient à la droite Δ de vecteur directeur $\vec{u}$ et passant par A si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont des vecteurs colinéaires $\Leftrightarrow \begin{vmatrix}x+1 & -1\\ y-3 & 2\end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow 2(x+1)-(y-3)\times(-1)=0 \Leftrightarrow 2x+2+y-3=0$

$\Leftrightarrow 2x+y-1=0 \Leftrightarrow -2x-y+1=0$

Question 5 Réponse : C

Preuve non demandée

Une équation du cercle de centre $A(2;4)$ et de rayon 3 est :

$(x-2)^2+(y-4)^2=3^2=4 \Leftrightarrow x^2-4x+4+y^2-8y+16-9=0 \Leftrightarrow x^2+y^2-4x-8y+11=0$

EXERCICE 2 (5 points)

Aujourd'hui des chardons (une plante vivace) ont envahi $300\ m^2$ d'une région. Chaque semaine la surface envahie augmente de 5 % par le développement des racines, auquel s'ajoute $15\ m^2$ suite à la dissémination des graines.
Pour tout entier naturel n, on note u_n la surface envahie par les chardons, en m^2, après n semaines.
On a donc $u_0=300\ (m^2)$.

1.a. Calculer u_1 et u_2.

1.b. Montrer que la suite (u_n) ainsi définie, n'est ni arithmétique, ni géométrique.

On admet dans la suite de l'exercice que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=1{,}05u_n+15$.

2. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par, $v_n=u_n+300$.

2.a. Calculer v_0, puis montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $q=1{,}05$.

2.b. Pour tout entier naturel n, exprimer v_n en fonction de n, puis montrer que $u_n=600\times1{,}05^n-300$.

3. Est-il correct d'affirmer que la surface envahie par les chardons aura doublé au bout de 8 semaines ? Justifier la réponse.

CORRECTION

1.a. $u_0=300$

Au bout d'une semaine, la surface envahie augmente de $5\ \%$ par le développement des racines.

$\frac{5}{100}\times u_0=0{,}05\times 300=15$

La surface envahie augmente aussi de $15\ m^2$ suite à la dissémination des graines, donc :

$u_1=u_0+\frac{5}{100}\times u_0+15=300+15+15=330\ (m^2)$.

An bout de la deuxième semaine, la surface envahie augmente de $5\ \%$ (par rapport à la première semaine) par le développement des racines.

$\frac{5}{100}\times u_1=0{,}05\times 330=16{,}5$

La superficie envahie augmente aussi de $15\ m^2$ suite à la dissémination des graines, donc :

$u_2=u_1+\frac{5}{100}\times u1+15=330+16{,}5+15=361{,}5\ (m^2)$

1.b. Si la suite (u_n) est une suite arithmétique alors u_1 est la moyenne arithmétique de u_0 et u_2.

$u_1=330 \qquad \frac{u_0+u_2}{2}=\frac{300+361{,}5}{2}=330{,}75\neq u_1$.

La suite (u_n) n'est pas une suite arithmétique.

. Si la suite (u_n) est une suite géométrique alors $|u_1|$ est la moyenne géométrique de $|u_2|$ et $|u_2|$ ou $u_1^2=u_0\times u_2$.

$u_1^2=330^2=108900 \qquad u_0\times u_2=300\times 361{,}75=108450\neq u_1^2$.

La suite (u_n) n'est pas une suite géométrique.

2.a. Pour tout entier naturel n, $v_n=u_n+300$ donc $u_n=v_n-300$.

$v_0=u_0+300=300+300=600$

Pour tout entier naturel n :

$v_{n+1}=u_{n+1}+300=1{,}05\times u_n+15+300=1{,}05\times(v_n-300)+315=1{,}05\,v_n-315+315$

$v_{n+1}=1{,}05\,v_n$.

La suite (v_n) est une suite géométrique de raison $1{,}05$.

2.b. Pour tout entier naturel n :

$v_n=v_0\times q^n=600\times 1{,}05^n$ et $u_n=v_n-300=600\times 1{,}05^n-300$.

3. La surface envahie aura doublé au bout de 8 semaines si et seulement si $u_8\geqslant 2\times u_0=600$.

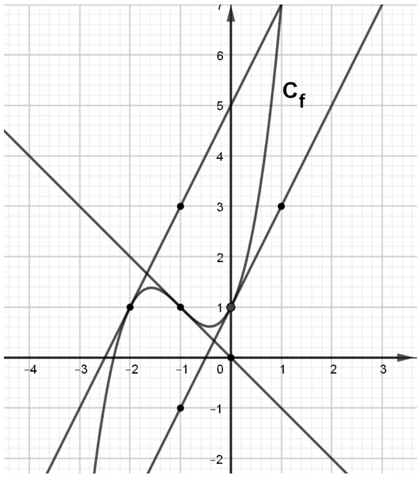
$u_8=600\times 1{,}05^8-300=586{,}47\ (m^2)$ (arrondi au centième)

$u_8<600$.

Il n'est pas correct d'affirmer que la surface envahie par les chardons aura doublé au bout de 8 semaines.

EXERCICE 3 (5 points)

Dans la figure ci-dessous, on a tracé C_f la courbe représentative d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ ainsi que les tangentes à C_f aux points d'abscisses : -2 ; -1 et 0.



1. Recopier sur la copie en le complétant le tableau de valeurs ci-dessous.

x	-1	0
f(x)		
f '(x)		

On admet que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x)=x^3+3x^2+2x+1$

2.a. Calculer $f'(x)$ pour tout réel x.

2.b. Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation $f'(x)=0$.

3. Dresser le tableau de variations de la fonction f.

4. Le point S(-4 ;-3) appartient-il à la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse : -2.

CORRECTION

1. Par lecture graphique :

C_f passe par les points de coordonnées (-1;1) et (0;1) donc $f(-1)=1$ et $f(0)=1$.

La tangente à C_f au point de coordonnées (-1;1) passe par l'origine de coordonnées (0;0). Le coefficient directeur de cette tangente est -1 (par lecture graphique ou par le calcul $\frac{1-0}{-1-0}=-1$) et ce coefficient directeur est égal à $f'(-1)$ donc $f'(-1)=-1$.

La tangente à C_f au point de coordonnées (0;1) passe par le point de coordonnées (1;3) son coefficient directeur est 2 (par lecture graphique ou par le calcul $\frac{3-1}{1-0}=2$) et ce coefficient directeur est égal à $f'(0)$ donc $f'(0)=2$.

On complète le tableau.

x	-1	0
f(x)	1	1
f '(x)	-1	2

2.a. $f(x)=x^3+3x^2+2x+1$

$f'(x)=3x^2+6x+2$

2.b. $f'(x)=0 \quad \Leftrightarrow \quad 3x^2+6x+2=0 \qquad \Delta=6^2-4\times3\times2=36-24=12=4\times3=(2\sqrt{3})^2>0$

$x_1=\frac{-6-2\sqrt{3}}{2\times3}=-1-\frac{\sqrt{3}}{3} \qquad x_2=\frac{-6+2\sqrt{3}}{2\times3}=-1+\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\mathcal{S}=\{-1-\frac{\sqrt{3}}{3};-1+\frac{\sqrt{3}}{3}\}$

3. Le coefficient de x^2 est positif donc $f'(x)>0$ pour x appartenant aux intervalles $]-\infty;x_1[$ et $]x_2;+\infty[$ et $f'(x)<0$ pour x appartenant à l'intervalle $]x_1;x_2[$.

Tableau de variations de f.

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
f '(x)		+	0	−	0	+	
f(x)		↗		↘		↗	

4. La tangente T à C_f au point de coordonnées (-2;1) passe aussi par le point de coordonnées (-1;3).

$f'(-2)=\frac{3-1}{-1+2}=2 \qquad T: \ y=2x+b$

$f(-2)=1 \qquad 1=2\times(-2)+b \quad \Leftrightarrow \quad b=5 \qquad T: \ y=2x+5$

$S(-4;-3) \qquad 2\times(-4)+5=-8+5=-3$

Donc S appartient à la tangente T à C_f au point d'abscisse -2.

EXERCICE 4 (5 points)

Uue étudestatistique menée lors des entraînements montre que, pour un tir au but, Karim marque avec une probabilité de 0,7.
Karim effectue une série de 3 tirs au but. Les deux issues possibles après chaque tir sont les événements :
. M : « Karim marque un but » ;
. R : « Karim rate son tir au but ».
On admet que les tirs au but de Karim sonr indépendants.

1. On note X la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre total de buts marqués à l'issue de cette série de tirs au but par Karim.

1.a. Réaliser un arbre pondéré permettant de décrire toutes les issues possibles.

1.b. Déterminer la loi de probabilité de X.

1.c. Calculer l'espérance E(X) de la variable aléatoire X.

2. On propose à un spectateur le jeu suivant : il mise 15€ avant la série de tirs au but de Karim : chaque but marqué par Karim lui rapporte 6€, et chaque but manqué par Karim ne lui rapporte rien.
On note Y la variable aléatoire qui prend pour valeur le gain algébrique du spectateur, c'est à dire la entre le gain total obtenu et la mise engagée.

2.a. Exprimer Y en fonction de X.

2.b. Calculer l'espérance E(Y) de la variable aléatoire Y.
Interpréter le résultat dans le contexte de l'énoncé.

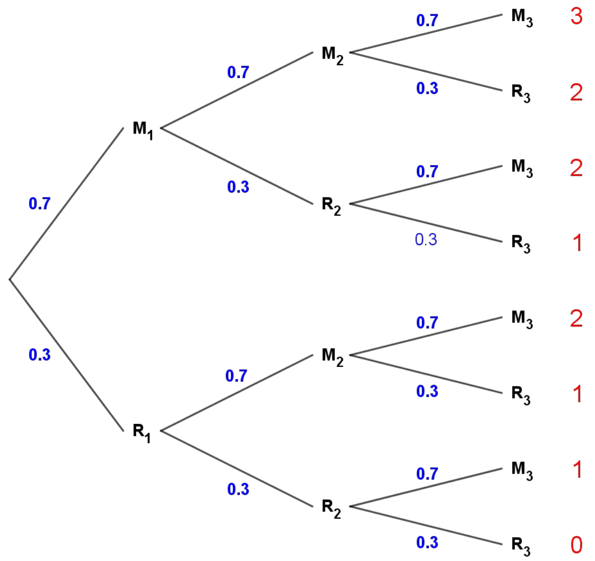
CORRECTION

1.a. $R=\bar{M}$ $\quad P(R)=1-P(M)=1-0,7=0,3$

On note M_1 l'événement : « Karim marque un but au premier tir » …..

Les tirs sont indépendants donc $P(M_1)=P(M_2)=P(M_3)=0,7$ et $P(R_1)=P(R_2)=P(R_3)=0,3$

Arbre pondéré :



1.b. On a écrit avec l'arbre pondéré les valeurs pour chaque issue pour X.

L'univers image est $\mathcal{X}=\{0;1;2;3\}$.

Les tirs au but de Karim sont indépendants donc :

$P(M_1\cap M_2\cap M_3)=0,7^3 \quad P(M_1\cap M_2\cap R_3)=0,7^2\times 0,3$ ….

$P(X=0)=P(R_1\cap R_2\cap R_3)=0,3^3=0,027$

$P(X=1)=P(M_1\cap R_2\cap R_3)+P(R_1\cap M_2\cap M_3)+P(R_1\cap R_2\cap R_3)=3\times 0,7\times 0,3^2=0,189$

$P(X=2)=P(M_1\cap M_2\cap R_3)+P(M_1\cap R_2\cap M_3)+P(R_1\cap M_2\cap M_3)=3\times 0,7^2\times 0,3=0,441$

$P(X=3)=P(M_1\cap M_2\cap M_3)=0,7^3=0,343$

On donne la loi de probabilité de X sous la forme d'un tableau.

On vérifie : 0,343+0,441+0,189+0,027=1

x_i	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	0.027	0.189	0.441	0.343

1.c. $E(X)=0\times 0,027+1\times 0,189+2\times 0,441+3\times 0,343=2,1$

2.a. $Y=6X-15$

2.b. $E(Y)=6\times E(X)-15=6\times 2,1-15=-2,4$

En effectuant un grand nombre de jeu, le spectateur perdra en moyenne 2,4€ par jeu.

