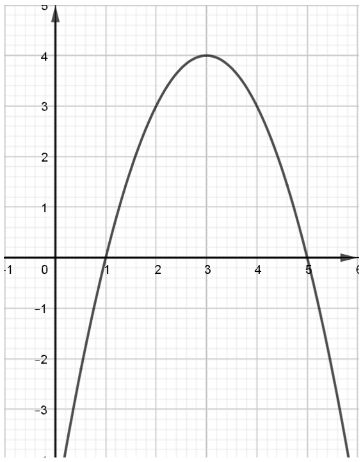
Sujet 13

EXERCICE 1 (5 points)

Cet exercice est un QCM et comprend cinq questions.
Pour chacune des questions, une seule des quatre réponses proposées est correcte.
Les questions sont indépendantes.
Pour chaque question, indiquer le numéro de la question et recopier la lettre correspondant à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée, mais il peut être nécessaire d'effectuer des recherches au brouillon pour aider à déterminer votre réponse.
Chaque réponse correcte rapporte un point. Une réponse incorrecte ou une question sans réponse n'apporte ni ne retire aucun point.

Question 1

Soient a, b et c trois nombres réels tels que $a \neq 0$ et soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$g(x) = ax^2 + bx + c$.
Soit Δ son discriminant.
La représentation graphique de la fonction g dans un repère orthonormé est donnée ci-dessous.



Alors on peut affirmer :

a) a>0 et Δ>0	b) a>0 et Δ<0	c) a<0 et Δ>0	d) a<0 et Δ<0

Question 2

On considère la fonction f dont la fonction dérivée est la fonction g considérée dans la question 1.
Le tableau de variation est :

a

x	-∞	3	+∞
variations de f	↗		↘

b

x	-∞	3	+∞
variations de f	↘		↗

c

x	-∞	1	5	+∞
variations de f	↘	↗	↘	

d

x	-∞	1	5	+∞
variations de f	↗	↘	↗	

Question 3

On considère de nouveau la fonction f dont la dérivée est la fonction g considère dans la question 1.
On sait de plus que $f(3)=7$.
La tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 3 a pour équation réduite :

a) y=4	b) y=4x+3	c) y=4x+7	d) y=4x-5

Question 4

Dans un repère orthonormé, on considère les points A(5;1), B(3;2) et C(1 ;-3).
Une équation cartésienne de la droite perpendiculaire à (AB) et passant par C est :

a) -2x+3y+11=0	b) 3x-2y-9=0	c) x-3y-10=0	d) 3x+2y+3=0

Question 5

Dans un repère orthonormé, on considère les points $A(5;-1)$, $B(3;2)$ et $C(1;-3)$.
Une mesure, arrondie au degré, de l'angle $\widehat{ABC}$ est :

a) 11	b) 25	c) 55	d) 83

CORRECTION

Question 1 **Réponse : c**

Preuve non demandée

La fonction g admet un maximum donc $a<0$.

La courbe représentative de g coupe l'axe des abscisses en deux points donc l'équation $g(x)=0$ admet deux solutions donc $\Delta>0$.

Question 2 **Réponse : c**

Preuve non demandée

On détermine graphiquement le signe de $g(x)=f'(x)$.

x	-∞		1		5		+∞
g(x)		−	0	+	0	−	

donc f est décroissante sur les intervalles $]-\infty;1[$ et $]5;+\infty[$ et croissante sur $]1;5[$.

Question 3 **Réponse : d**

Preuve non demandée

La tangente passe par le point de coordonnées (3;7).

a) $7\neq4$ b) $7\neq4\times3+3=15$ c) $7\neq4\times3+7=19$ d) $7=4\times3-5$

Question 4 **Réponse : a**

Preuve non demandée

Soit Δ la droite perpendiculaire à (AB) passant par C. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à Δ.

$\vec{N}_a\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à D_a : -2x+3y+11=0.

$\vec{N}_b\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à D_b : 3x-2y-9=0

$\vec{N}_c\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à D_c : x -3y-10=0

$\vec{N}_d\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à C_d ; 3x+2y+3=0

$\vec{N}_a=\overrightarrow{AB}$ $\vec{N}_b$, $\vec{N}_c$ et $\vec{N}_d$ ne sont pas colinéaires à $\overrightarrow{AB}$.

$C(1;-3)$ $-2\times1+3\times(-3)+11=-2-9+11=0$ donc C appartient à D_a.

Donc $D_a=\Delta$.

Question 5 **Réponse : d**

Preuve non demandée

A(5 ;-1), B(3,2) et C(1 ;-3) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-4\\-2\end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=(-2)\times(-4)+3\times(-2)=8-6=2$

$AB^2=(-2)^2+3^2=4+9=13$ $AB=\sqrt{13}$

$AC^2=(-4)^2+(-2)^2=16+4=20=4\times5$ $AC=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB\times AC\times\cos(\widehat{BAC})$

$$\cos(\widehat{BAC})=\frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{AB\times AC}=\frac{2}{\sqrt{13}\times2\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{65}}$$

En utilisant la calculatrice, on obtient : $83°$

EXERCICE 2 (5 points)

En 2000, la production mondiale de plastique était de 187 millions de tonnes. On suppose que depuis 2000, cette production augmente de 3,7 % chaque année.
On modélise la production mondiale de plastique, en millions de tonnes, produite l'année $(2000+n)$ par la suite de terme général u_n où n désigne le nombre d'années à partir de l'an 2000.
Ainsi $u_0 = 187$.

1. Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ exprimer u_n en fonction de n.

3. Étudier le sens de variation de la suite (u_n).

4. Selon cette estimation, calculer la production mondiale de plastique en 2019.
Arrondir en million de tonnes.

5. Des études montrent que 20 % de la quantité totale de plastique se retrouve dans les océans, et que 70 % de ces déchets finissent par couler.
Montrer que la quantité totale de tonnes, de déchets flottants sur l'océan dus à la production de plastique de 2000 à 2019 compris est de 324 millions de tonnes.

CORRECTION

1. Pour tout entier naturel n, pendant l'année (2000+n+1) la production mondiale de plastique augmente de 3,7 % par rapport à la production mondiale de plastique pendant l'année (2000+n) donc :

$$u_{n+1}=u_n+\frac{3,7}{100}u_n=u_n+0,037\,u_n=1,037\,u_n$$

(u_n) est une suite géométrique de raison 1,037.

2. $u_0=187$

Pour tout entier naturel n :

$$u_n=u_0\times q^n=187\times 1,037^n$$

3. Pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1}-u_n=u_0\times q^{n+1}-u_0\times q^n=u_0\times q^n\times(q-1)=187\times 1,037^n\times 0,037>0 .$$

La suite (u_n) est strictement croissante.

4. 2019=2000+19 donc :

une estimation de la production mondiale en 2019 est $u_{19}=187\times 1,037^{19}=373$ millions de tonnes (arrondi à l'unité).

5. La production mondiale de plastique de 2000 à 2019 est $S=u_0+u_1+\ldots+u_{19}$.

$qS=u_1+u_2+\ldots+u_{20}$ $\qquad qS-S=(q-1)S=u_{20}-u_0=u_0(q^{20}-1)$

$$S=u_0\times\frac{q^{20}-1}{q-1}=187\times\frac{10,37^{20}-1}{0,037}=5398,321613$$

Soit 5398 millions de tonnes (arrondi à l'unité).

20 % de cette quantité totale de plastique se retrouve dans les océans, soit :

$$S\times\frac{20}{100}=S\times 0,2=1079,664323$$

Soit 1080 millions de tonnes (arrondi à l'unité).

70 % des déchets plastiques finissent par couler donc 30 % restent flottants.

La quantité totale des déchets flottants sur l'océan est :

$$S\times 0,2\times 0,3=323,8992968$$

Soit 323 millions de tonnes (arrondi à l'unité).

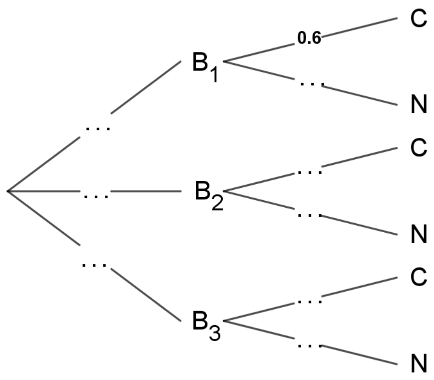
EXERCICE 3 (5 points)

Un cafetier propose à ses clients, des cookiees au chocolat ou aux noisettes en s'approvisionnant dans trois boulangeries. Un client prend un cookie au hasard.

On note :
C l'événement « le cookie est au chocolat »
N l'événement « le cookie est aux noisettes »
B_1 l'événement « le cookie provient de la boulangerie 1 »
B_2 l'événement « le cookie provient de la boulangerie 2 »
B_3 l'événement « le cookie provient de la boulangerie 3 ».

On suppose que :
- la probabilité que le cookie provienne de la boulangerie 1 est 0,49 ;
- la probabilité que le cookie provienne de la boulangerie 2 est 0,36 ;
- $P_{B_2}(C)=0{,}4$ où $P_{B_2}(C)$ est la probabilité conditionnelle de C sachant B_2
- la probabilité que le cookie soit aux noisettes sachant qu'il provient de la troisième boulangerie est de 0,3.

L'arbre pondéré ci-dessous correspond à la situation et donne une information supplémentaire : le nombre 0,6 sur la branche de B_1 à C.



1. Exprimer par une phrase l'information donnée par le nombre 0,6 sur la branche de B_1 à C.

2. Recopier et compléter sur la copie l'arbre pondéré ci-dessus.

3. Définir par une phrase l'événement $B_1 \cap C$ et calculer sa probabilité.

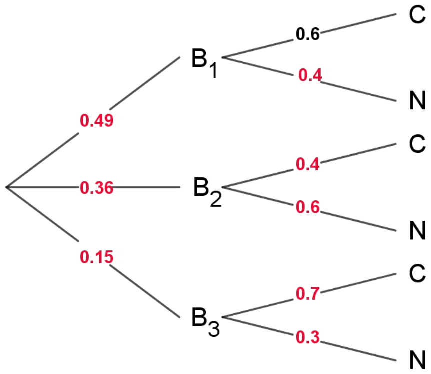
4. Montrer que la probabilité $P(C)$ d'avoir un cookie chocolat est égale à 0,543.

5. Calculer la probabilité d'avoir un cookie provenant de la boulangerie 2 sachant qu'il est au chocolat.
On donnera le résultat arrondi au millième.

CORRECTION

1. $0{,}6 = P_{B_1}(C)$ est la probabilité conditionnelle de C sachant B_1.
0,6 est la probabilité que le cookie soit un cookie chocolat sachant que le cookie provient de la boulangerie 1.

2. L'énoncé précise :
$P(B_1)=0{,}49$ et $P(B_2)=0{,}36$ donc $P(B_3)=1-P(B_1)-P(B_2)=1-0{,}49-0{,}36=0{,}15$
$P_{B_1}(C)=0{,}6$ $\quad N=\bar{C}$ $\quad P_{B_1}(N)=1-P_{B_1}(C)=1-0{,}6=0{,}4$
$P_{B_2}(C)=0{,}4$ $\quad P_{B_2}(N)=1-P_{B_2}(C)=1-0{,}4=0{,}6$
$P_{B_3}(N)=0{,}3$ $\quad P_{B_3}(C)=1-P_{B_3}(N)=1-0{,}3=0{,}7$
On obtient l'arbre pondéré ci-dessous :



3. $B_1 \cap C$ est l'événement : « le cookie provient de la boulangerie 1 **et** le cookie est au chocolat ».

4. En utilisant la formule des probabilités totales :
$P(C)=P(B_1\cap C)+P(B_2\cap C)+P(B_3\cap C)=P(B_1)\times P_{B_1}(C)+P(B_2)\times P_{B_2}(C)+P(B_3)\times P_{B_3}(C)$
$P(C)=0{,}49\times 0{,}6+0{,}36\times 0{,}4+0{,}15\times 0{,}7=0{,}294+0{,}144+0{,}105$
$P(C)=0{,}543$.

5. $P_C(B_2)=\dfrac{P(C\cap B_2)}{P(C)}=\dfrac{0{,}144}{0{,}543}=\dfrac{144}{543}=\dfrac{48}{181}$
$P_C(B_2)=\dfrac{18}{181}=0{,}265$ arrondi au millième.

EXERCICE 4 (5 points)

1. Étudier le signe de la fonction P définie sur $\mathbb{R}$ par : $\mathrm{P}(x)=x^2+4x+3$.

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]-1;+\infty[$ par $f(x)=\frac{x^2+x-1}{x+2}$ et on note C_f sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan.
On admet que la fonction f est dérivable sur $]-2;+\infty[$

2. Montrer que pour tout nombre réel x de l'intervalle $]-2;+\infty[$ $f'(x)=\frac{\mathrm{P}(x)}{(x+2)^2}$ où f' est la fonction dérivée de f.

3. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $]-2;+\infty[$ et construire le tableau de variations de f sur $]-2;+\infty[$.

4. Donner le minimum de la fonction f sur $]-2;+\infty[$ et la valeur pour laquelle il est atteint (on donnera les valeurs exactes).

5. Déterminer le coefficient directeur de la tangente T à la courbe C_f au point d'abscisse 2.

CORRECTION

1. $P(x)=x^2+4x+3$

$\Delta=4^2-4\times1\times3=16-12=4=2^2$

$x_1=\dfrac{-4+2}{2\times1}=\dfrac{-2}{2}=-1 \qquad x_2=\dfrac{-4-1}{2\times1}=\dfrac{-6}{2}=-3$

Le coefficient de x^2 est positif.

x	$-\infty$		-3		-1		$+\infty$
P(x)		+	0	−	0	+	

2. $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'\times v-u\times v'}{v^2}$

$u(x)=x^2+x-1 \qquad u'(x)=2x+1$

$v(x)=x+2 \qquad v'(x)=1$

$f'(x)=\dfrac{(2x+1)\times(x+2)-(x^2+x-1)\times1}{(x+2)^2}=\dfrac{2x^2+4x+x+2-x^2-x+1}{(x+2)^2}$

$f'(x)=\dfrac{x^2+4x+3}{(x+2)^2}=\dfrac{P(x)}{(x+2)^2}$

3. Pour tout nombre réel x, on a $(x+2)^2>0$ donc le signe de $f'(x)$ est le signe de P(x) sur $]-2;+\infty[$.

x	$-\infty$		-3		-2		-1		$+\infty$
f '(x)		+	0	−		−	0	+	

Tableau de variations de f.

x	-2		-1		$+\infty$
f '(x)		−	0	+	
f(x)		↘		↗	

4. f admet un minimum pour x= -1 ce minimum est égal à $f(-1)=\dfrac{(-1)^2-1-1}{-1+2}=\dfrac{-1}{1}=-1$.

5. Le coefficient directeur de la tangente T au point d'abscisse 2 est $f'(2)$.

$f'(2)=\dfrac{2^2+4\times2+3}{(2+2)^2}=\dfrac{4+8+3}{4^2}=\dfrac{15}{16}$