Sujet 14

EXERCICE 1 (5 points)

Cet exercice est un QCM et comprend cinq questions.
Pour chacune des questions, une seule des quatre réponses proposées est correcte.
Les questions sont indépendantes.
Pour chaque question, indiquer le numéro de la question et recopier la lettre correspondant à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée, mais il peut être nécessaire d'effectuer des recherches au brouillon pour aider à déterminer votre réponse.
Chaque réponse correcte rapporte un point. Une réponse incorrecte ou une question sans réponse n'apporte ni ne retire aucun point.

Question 1

L'inéquation $x^2+x+2>0$

a	n'a pas de solution	b	a une seule solution	c	a pour ensemble de solutions l'intervalle [1;2]	d	a pour solution l'ensemble des nombres réels

Question 2

Soient $\vec{U}$ et $\vec{V}$ deux vecteurs tels que $\|\vec{U}\|=3$, $\|\vec{V}\|=2$ et $\vec{U}.\vec{V}=-1$ alors $\|\vec{U}+\vec{V}\|^2$ est égal à :

a)	11	b)	13	c)	15	d)	25

Question 3

Soient A et B deux événements d'un univers tels que $P_A(B)=0{,}2$ et $P(A)=0{,}5$. Alors la probabilité $P(A\cap B)$ est égale à :

a)	0.4	b)	0.1	c)	0.25	d)	0.7

Question 4

Soit (u_n) une suite arithmétique de terme initial $u_0=2$ et de raison 3.
La somme S définie par $S=u_0+u_1+\ldots+u_{12}$ est égale à :

a)	45	b)	222	c)	260	d)	301

Question 5

Soit f la fonction définie sur l'ensemble des nombres réels par $f(x)=(2x-5)^3$.
Une expression de la dérivée de f est :

a) $3(2x-5)^2$	b) $6(2x-5)^2$	c) $2(2x-5)^2$	d) 2^3

CORRECTION

Question 1 **Réponse :** d

Preuve non demandée

$T(x)=x^2+x+2$ $\Delta=1^2-4\times1\times2=-7<0$ Le coefficient x^2 est positif.

Donc, pour tout nombre réel x, $T(x)=x^2+x+2>0$

Question 2 **Réponse :** a

Preuve non demandée

$\|\vec{U}+\vec{V}\|^2=\|\vec{U}\|^2+\|\vec{V}\|^2+2\vec{U}.\vec{V}=3^2+2^2+2\times(-1)=9+4-2=11$

Question 3 **Réponse :** b

Preuve non demandée

$P_A(B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)} \Leftrightarrow P(A\cap B)=P(A)\times P_A(B)$

$P(A\cap B)=0{,}5\times0{,}2=0{,}1$

Question 4 **Réponse :** c

Preuve non demandée

Si (u_n) est la suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r alors :

pour tout entier naturel n $u_n=u_0+nr$ et $S=u_0+u_n+\ldots+u_n=\dfrac{(n+1)(u_0+u_n)}{2}$.

Pour $u_0=2$ $r=3$ et $n=12$, $S=u_0+u_1+\ldots+u_{12}=\dfrac{(12+1)(2+2+12\times3)}{2}=\dfrac{13\times40}{2}=13\times20=260$.

Question 5 **Réponse :** b

Preuve non demandée

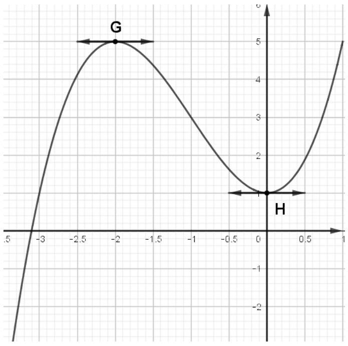
$(u^3)'=u^2\times u'$

$u(x)=2x+5$ $u'(x)=2$

$((2x+5)^3)'=3(2x+5)^2\times2=6(2x+5)^2$

EXERCICE 2 (5 points)

La courbe ci-dessous représente, dans un repère du plan, une fonction f définie et dérivable sur l'ensemble des nombres réels.
Les points $G(-2;5)$ et $H(0;1)$ appartiennent à la courbe représentative de la fonction f et les tangentes à la courbe aux points G et H sont horizontales.



1. Déterminer $f(0)$, $f(-2)$, $f'(0)$ et $f'(-2)$.

2. On admet que pour tout réel x, $f(x)$ peut s'écrire sous la forme :
$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ où a, b, c et d désignent des nombres réels.

2.a. Donner une expression de $f'(x)$

2.b. Donner les valeurs de c et d.

2.c. Déterminer deux équations que vérifient les réels a et b.

2.d. En déduire que $f(x)=x^3+3x^2+1$.

CORRECTION

1. Le point H(0;1) appartient à la courbe représentative de f donc $f(0)=1$.
Le point G(-2;5) appartient à la courbe représentative de f donc $f(-2)=5$.
La tangente à la courbe représentative de f au point H est horizontale donc $f'(0)=0$.
La tangente à la courbe représentative de f au point G est horizontale donc $f'(-2)=0$.

2. $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$

2.a. $f'(x)=a(3x^2)+b(2x)+c$
$f'(x)=3ax^2+2bx+c$

2.b. $f(0)=1 \Leftrightarrow a\times0^3+b\times0^2+c\times0+d=1 \Leftrightarrow d=1$
$f'(0)=0 \Leftrightarrow 3a\times0^2+2b\times0+c=0 \Leftrightarrow c=0$
donc $f(x)=ax^3+bx^2+1$ et $f'(x)=3ax^2+2bx$.

2.c. $f(-2)=5 \Leftrightarrow a\times(-2)^3+b\times(-2)^2+1=5 \Leftrightarrow -8a+4b=4$
$f'(-2)=0 \Leftrightarrow 3a\times(-2)^2+2b\times(-2)=0 \Leftrightarrow 12a-4b=0$

2.d. $\begin{cases}-8a+4b=4\\ 12a-4b=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-2a+b=1\\ 3a-b=0\end{cases}$
Par addition : $-2a+b+3a-b=1+0 \Leftrightarrow a=1$
Et on a $3a=b$ donc $b=3$
Conséquence :
$f(x)=x^3+3x^2+1$

EXERCICE 3 (5 points)

Dans une usine, un four cuit des céramiques à la température de 1000°C.
À la fin de la cuisson, on éteint le four et commence alors la phase de refroidissement.
Pour un nombte entier n, on note T_n la température, en degré celsius, du four au bout de n heures écoulées à partir de l'instant où il a été éteint. On a donc $T_0 = 1000$.
La température T_n est calculée grâce à l'algorithme suivant :

```
T ← 1000
Pour i allant de 1 à n
  T ← 0.82*T+3.6
Fin pour
```

1. Quelle est la température du four après une heure de refroidissement ?

2. Exprimer T_{n+1} en fonction de T_n .

3. Déterminer la température du four, arrondie à l'unité, après quatre heures de refroidissement.

4. La porte du four peut être ouverte sans risque pour les céramiques dès que sa température est inférieure à 70°C. Afin de déterminer le nombre d'heures au bout duquel le four ouvert sans risque.
On définit une fonction « froid » en langage Python :

```
1  def froid():
2    T=1000
3    n=n+1
4    while . . . . . .:
5      T= . . . ..
6      n=n+1
7    return n
```

Recopier et compléter les instruction 4 et 5.

5. Déterminer le nombre d'heures au bout duquel le four peut-être ouvert sans risque pour les céramiques.

CORRECTION

1. $T_1 = 0{,}82 \times 1000 + 3{,}6 = 8203{,}6\,^\circ C$

2. L'instruction de la 3ième ligne de l'algorithme nous permet d'affirmer que pour tout entier naturel n :
$T_{n+1} = 0{,}82 \times T_n + 3{,}6$.

3. $T_2 = 0{,}82 \times 8203{,}6 + 3{,}6 = 6730{,}7324$
$T_3 = 0{,}82 + T_2 + 3{,}6 = 5522{,}800568$
$T_4 = 0{,}82\, T_3 + 3{,}6 = 4532{,}296466$
4532°C est la température, arrondie à l'unité, au bout de quatre heures.

4. On complète le programme demandé.

```
1   def froid():
2      T=1000
3      n=n+1
4      while T>=70  :
5         T= 0.82*T+3.6
6         n=n+1
7      return n
```

5. Si on exécute le programme précédent en ajoutant une ligne : 8   print(froid()).
On obtient : 15.
Il faut donc 15 heures pour pouvoir ouvrir le four sans risque pour les céramiques.
. Sinon il faut utiliser la calculatrice et arriver à T_{15} .

EXERCICE 4 (5 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé.
On considère les points A(-3;1), B(3;5) et C(7;1) dans ce repère.
Le but de l'exercice est de déterminer les coordonnées du centre du cercle circonscrit au triangle ABC et le rayon de ce cercle.
On rappelle que le cercle circonscrit à un triangle est le cercle passant par les trois sommets de ce triangle.

1. Placer les points A, B et C dans le triangle puis construire le cercle circonscrit au triangle ABC.

2. Vérifier que la droite Δ d'équation : $3x+2y-6=0$ est la médiatrice du segment [AB].

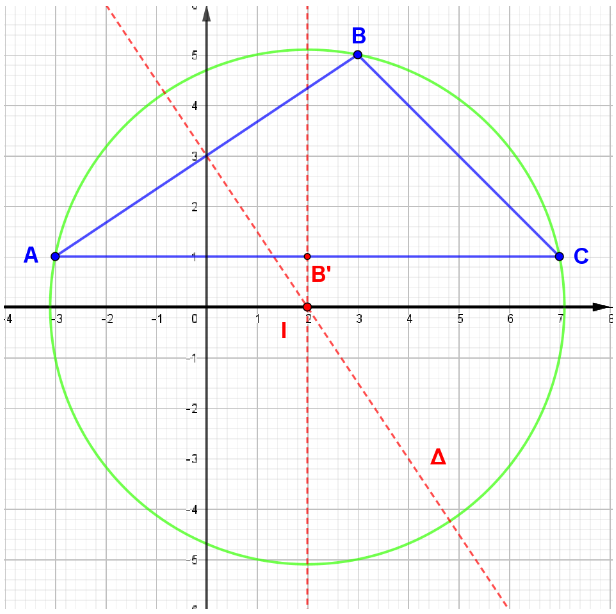
3. Déterminer les coordonnées du point B', milieu de [AC].

4. Déterminer les coordonnées du point I, centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

5. Calculer une valeur exacte du rayon du cercle circonscrit au triangle ABC.

CORRECTION

1.



2. (Δ): $3x+2y-6=0$ $\vec{N}\begin{pmatrix}6\\4\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à (Δ).

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}6\\4\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB}=2\vec{N}$ donc Δ est une droite orthogonale à (AB).

Soit C' le point de [AB]. $C'\left(\frac{-3+3}{2};\frac{1+5}{2}\right)$ $C'(0;3)$ et $3\times 0+2\times 3-6=0$

donc C' appartient à Δ.

Δ est donc la médiatrice de [AB].

3. B' est le milieu de [AC].

$B'\left(\frac{-3+7}{2};\frac{1+1}{2}\right)$ $B'(2;1)$

$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}10\\0\end{pmatrix}$ $\vec{N}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à la droite (AC).

Δ' est la médiatrice de [AC].

Δ': $x+0y+k=0$

B' appartient à Δ' $2+0\times 1+k=0 \Leftrightarrow k=-2$

Δ': $x-2=0$

4. I centre du cercle circonscrit au triangle ABC est le point d'intersection de Δ et Δ'.

$\begin{cases}3x+2y-6=0\\x-2=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3x+2y=6\\x=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=2\\3\times 2+2y=6\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=2\\y=0\end{cases}$ $I(2;0)$

5. IA est égal au rayon du cercle circonscrit au triangle ABC.

$IA^2=(-3-2)^2+(1-0)^2=25+1=26$

$IA=\sqrt{26}$

