Sujet 15

EXERCICE 1 (5 points)

Cet exercice est un QCM et comprend cinq questions.
Pour chacune des questions, une seule des quatre réponses proposées est correcte.
Les questions sont indépendantes.
Pour chaque question, indiquer le numéro de la question et recopier la lettre correspondant à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée, mais il peut être nécessaire d'effectuer des recherches au brouillon pour aider à déterminer votre réponse.
Chaque réponse correcte rapporte un point. Une réponse incorrecte ou une question sans réponse n'apporte ni ne retire aucun point.

Question 1

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 100$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n - \frac{13}{100} u_n$.

Quelle est la nature de la suite (u_n) ?

A	géométrique de raison 1	B	arithmétique de raison $-\frac{13}{100}$
C	géométrique de raison 1 et arithmétique de raison $-\frac{13}{100}$	D	géométrique de raison 0.87

Question 2

On considère la variable aléatoire qui prend les valeurs x_i pour i entier naturel allant de 1 à 5.
La loi de probabilité incomplète de la variable aléatoire X est donnée ci-dessous.

$X = x_i$	-6	-3	0	3	x_5
$P(X = x_i)$	0.2	0.1	0.2	0.4	0.1

L'espérance mathématique de la variable aléatoire X est égale à 0,7.
Quelle est la valeur x_5 prise par la variable aléatoire X ?

A) 6	B) 1	C) 10	D) 100

Question 4

Soit f la fonction définie et dérivable sur $\left]-\frac{7}{3};+\infty\right[$ par $f(x) = \frac{2x+3}{3x+7}$ et f' sa fonction dérivée.

A $f'(x) = \frac{2}{3}$	B $f'(x) = \frac{23}{(3x+7)^2}$	C $f'(x) = \frac{5}{(3x+7)^2}$	D $f'(x) = \frac{5}{3x+7}$

Question 4

De 2017 à 2018, le prix d'un article a augmenté de 10 %. En 2019, ce même article a retrouvé son prix de 2018.
Quelle été l'évolution du prix entre 2018 et 2019 ?

A) une baisse de 10%	B) une baisse de plus de 10%
C) on ne peut pas savoir	D) une baisse de moins de 10%

Question 5

Soit (u_n) la suite définie par $u_0=4$ et pour tout entier naturel n par $u_{n+1}=3u_n-5$.
On souhaite qu'à la fin de l'exécution de l'algorithme, la valeur contenue dans la variable u soit celle de u_5.
Quel algorithme doit-on choisir ?

A
```
u=4
n=0
for k in range(5):
  u=3*n-5
  n=n+1
```

B
```
u=4
n=0
for k in range(5):
  un+1=3*un-5
  n=n+1
```

C
```
u=4
for k in range(5):
  u=3*u-5
```

D
```
u=4
n=0
while ≤5:
  u=3*u-5
  n=n+1
```


CORRECTION

Question 1 Réponse : D

Preuve non demandée

Pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=u_n-\frac{13}{100}u_n=u_n-0{,}13\,u_n=(1-0{,}13)\,u_n=0{,}87\,u_n$.

donc (u_n) est une suite géométrique de raison 0,87.

Question 2 Réponse : C

Preuve non demandée

$E(X)=-6\times0{,}2-3\times0{,}1+0\times0{,}1+3\times0{,}4+x_5\times0{,}1=0{,}7 \Leftrightarrow -1{,}2+0{,}3+1{,}2+0{,}1\times x_5=0{,}7$

$\Leftrightarrow 0{,}1\times x_5=0{,}7+0{,}3=1 \Leftrightarrow x_5=\frac{1}{0{,}1}=10$.

Question 3 Réponse : C

Preuve non demandée

$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'\times v-u\times v'}{v^2}$

$u(x)=2x+3 \qquad u'(x)=2$

$v(x)=3x+7 \qquad v'(x)=3$

$f'(x)=\frac{2\times(3x+7)-(2x+3)\times3}{(3x+7)^2}=\frac{6x+14-6x-9}{(3x+7)^2}=\frac{5}{(3x+7)^2}$.

Question 4 Réponse : D

Preuve non demandée

Soit X le prix de l'article considéré en 2017. Le prix de l'article en 2018 est $Y=X+\frac{10}{100}X=1{,}1\,X$.

Le prix de l'article baisse de a % en 2019 revient égal au prix X.

$Y-\frac{a}{100}Y=X \Leftrightarrow Y\left(1-\frac{a}{100}\right)=X \Leftrightarrow 1{,}1\,X\left(1-\frac{a}{100}\right)=X \Leftrightarrow 1{,}1\left(1-\frac{a}{100}\right)=1$

$\Leftrightarrow 1-\frac{a}{100}=\frac{1}{1{,}1} \Leftrightarrow 1-\frac{1}{1{,}1}=\frac{a}{100} \Leftrightarrow \frac{1{,}1-1}{1{,}1}=\frac{a}{100} \Leftrightarrow \frac{0{,}1}{1{,}1}=\frac{a}{100} \Leftrightarrow \frac{1}{11}=\frac{a}{100}$

$\Leftrightarrow a=\frac{100}{11}<10$.

Question 5 Réponse : C

Preuve non demandée

$u_0=4 \qquad u_1=3\times4-5=7 \qquad u_2=3\times7-5=16 \qquad u_3=3\times16-5=43 \qquad u_4=3\times43-5=124$

$u_5=3\times124-5=372-5=367$

A pour k=0 $u=3\times0-5=-5$ $n=1$
pour k=1 $u=3\times1-5=-3$ $n=2$
pour k=2 $u=3\times2-5=1$ $n=3$
pour k=3 $u=3\times3-5=4$ $n=4$
pour k=4 $u=3\times4-5=7$ $n=5$

B La 4ème ligne ne donne pas une instruction Python (u_{n+1} est inconnu).

C pour k=0 $u=3\times4-5=7$
pour k=1 $u=3\times7-5=16$
pour k=2 $u=3\times16-5=43$
pour k=3 $u=3\times43-5=124$
pour k=4 $u=3\times124-5=367$

D La 3ème ligne n'est pas une instruction Python.

EXERCICE 2 (5 points)

Un restaurateur propose à sa carte deux desserts différents :
. le premier dessert un assortiment de macarons, et est choisi par 40 % des clients
. le second dessert est une part de tarte, et est choisi par 30 % des clients.
Les autres clients ne prennent pas de dessert. Aucun client ne prend plusieurs desserts.

Le restaurateur a remarqué que parmi les clients ayant pris comme dessert un assortiment e macarons, 70 % prennent un café, que parmi les clients ayant pris comme dessert une part de tarte, 40 % prennent un café et que parmi les clients n'ayant pas pris de dessert, 90 % prennent un café.

On interroge au hasard un client de ce restaurant.
On note :
. M l'événement : « le client prend un assortiment de macarons »
. T l'événement : « le client prend une part de tarte »
. N l'événement : « le client ne prend pas de dessert »
. C L'événement : « le client prend un café ».

1. Construire un arbre de probabilités décrivant la situation.

2. Définir par une phrase les probabilités $P(T\cap C)$ et $P_C(M)$ (on ne demande pas de les calculer).

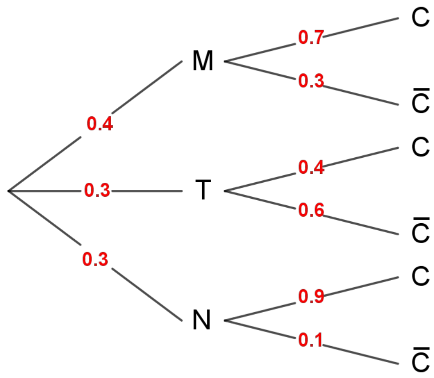
3. Calculer $P(T\cap C)$ puis $P(C)$.

4. On rencontre un client ayant pris un café. Quelle est la probabilité qu'il ait pris une part de tarte ?
On donnera le résultat sous forme d'une fraction irréductible.

CORRECTION

1. L'énoncé précise :

- 40 % des clients prennent pour dessert un assortiment de macarons donc $P(M)=0{,}4$.
- 30 % des clients prennent pour dessert une part de tarte donc $P(T)=0{,}3$.
- Les autres ne prennent pas de dessert donc $P(N)=1-P(M)-P(T)=1-0{,}4-0{,}3=0{,}3$.
- 70 % des clients prenant un assortiment de macarons prennent un café donc $P_M(C)=0{,}7$ et $P_M(\bar{C})=1-P_M(C)=1-0{,}7=0{,}3$.
- 40 % des clients prenant une part de tarte prennent un café donc $P_T(C)=0{,}4$ et $P_T(\bar{C})=1-P_T(C)=10{,}4=0{,}6$.
- 90 % des clients ne prenant pas de dessert prennent un café donc $P_N(C)=0{,}9$ et $P_N(\bar{C})=1-P_N(C)=1-0{,}9=0{,}1$.
- On obtient l'arbre de probabilités suivant :



2. $P(T\cap C)$ est la probabilité que le client prenne pour dessert une part de tarte **et** prenne un café.
$P_C(M)$ est la probabilité que le client ait pris pour dessert un assortiment de macarons sachant qu'il a pris un café.

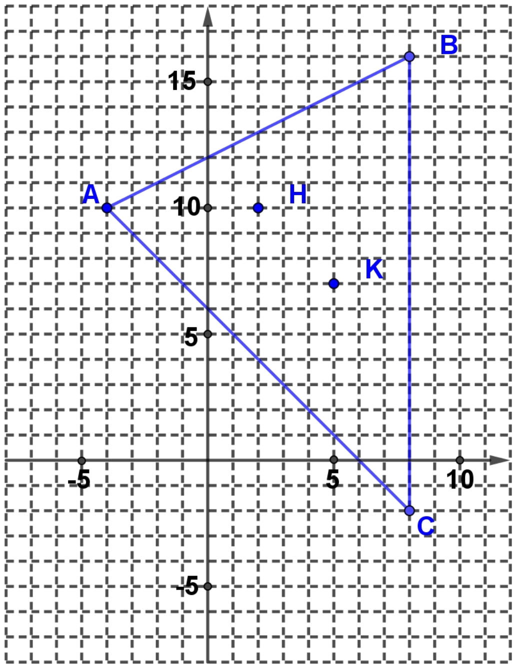
3. $P(T\cap C)=P(T)\times P_T(C)=0{,}3\times 0{,}4=0{,}12$.
En utilisant la formule des probabilités totales.
$P(C)=P(M\cap C)+P(T\cap C)+P(N\cap C)$
$P(M\cap C)=P(M)\times P_M(C)=0{,}4\times 0{,}7=0{,}28$
$P(T\cap C)=0{,}12$
$P(N\cap C)=P(N)\times P_N(C)=0{,}3\times 0{,}9=0{,}27$
$P(C)=0{,}28+0{,}12+0{,}27=0{,}67$

4. On nous demande de calculer $P_C(T)$.

$$P_C(T)=\frac{P(C\cap T)}{P(C)}=\frac{0{,}12}{0{,}67}=\frac{12}{67}$$

EXERCICE 3 (5 points)

On appelle orthocentre d'un triangle le point de concours de ses trois hauteurs.
Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère les points :
$A(-4;10)$ $B(8;16)$ $C(8;-2)$ $H(2;10)$ $K(5;7)$



1. Montrer que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{HC}=0$ et $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{HB}=0$.

2. Que représente le point H pour le triangle ABC ?

3. Montrer que le point K est le centre du cercle passant par les sommets du triangle ABC.

4. On admet que G, le centre de gravité du triangle ABC est le point qui qui vérifie $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$ où M est le milieu du segment [BC]. Déterminer les coordonnées de G.

5. Montrer que les points G ; H et K sont alignés.

CORRECTION

1. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}12\\6\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{HC}\begin{pmatrix}-6\\12\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}12\\-12\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix}-6\\-6\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{HC}=12\times(-6)+6\times12=-72+72=0$

$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{HC}=12\times(-6)-12\times(-6)=-72+72=0$

2. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{HC}=0$ donc les droites (AB) et (CH) sont perpendiculaires et (CH) est la hauteur du triangle ABC issue de C.

. $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{HB}=0$ donc les droites (AC) et (BH) sont perpendiculaires et (BH) est la hauteur du triangle ABC issue de B.

. Les deux hauteurs (CH) et (BH) du triangle ABC sont sécantes en H.
H est donc l'orthocentre du triangle ABC.

3. $\overrightarrow{KA}\begin{pmatrix}9\\-3\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{KB}\begin{pmatrix}3\\-9\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{KC}\begin{pmatrix}3\\9\end{pmatrix}$

$KA^2=9^2+(-3)^2=81+9=90$

$KB^2=3^2+(-9)^2=9+81=90$

$KC^2=3^2+9^2=9+81=90$

$KA=KB=KC=\sqrt{90}=3\sqrt{10}$.

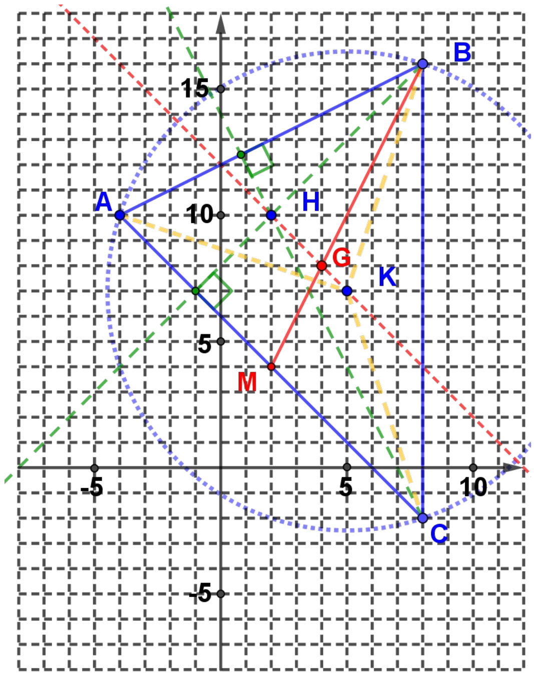
K est le centre du cercle passant par les points A ; B et C.

4. M est le milieu de [BC] $M\left(\dfrac{8+8}{2};\dfrac{16-2}{2}\right)$ $M(8;7)$ G(x;y) $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}12\\-3\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}x+4\\y-10\end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AM} \Leftrightarrow \begin{cases}x+4=\dfrac{2}{3}\times12\\ y-10=\dfrac{2}{3}\times(-3)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=4\\ y=8\end{cases} \qquad G(4;8)$$

5. $\overrightarrow{HK}\begin{pmatrix}3\\-3\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{HG}\begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix}$ on remarque : $\overrightarrow{HK}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{HG}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{HK}$ et $\overrightarrow{HG}$ sont colinéaires donc les points H ; K et G sont alignés.



EXERCICE 4 (5 points)

Une entreprise produit du tissu.
Le coût total de production (en €) de l'entreprise est modélisée par la fonction :
$C(x)=15x^3-120x^2+500x+750$ où x est la longueur du tissu fabriqué, exprimée en kilomètre, x étant compris entre 0 et 10.
Chaque kilomètre de tissu est vendu 680€.
On note $B(x)$ le résultat de l'entreprise, c'est à dire la différence entre la recette et le coût de production, pour la vente de x kilomètres de tissu.

1. Quel est le résultat de l'entreprise par la vente de 3 kilomètres de tissu ?

2. Montrer que : $B(x)=-15x^3+120x^2+180x-750$.

3. Donner une expression de $B'(x)$ où B' est la fonction dérivée de la fonction B.

4. Dresser le tableau de signes de $B'(x)$ puis le tableau de variation de B.

5. Combien de kilomètres de tissu l'entreprise doit-elle produire afin d'obtenir un résultat maximal ?

CORRECTION

1. $C(x)=15x^3-120x^2+500x+750$

$C(3)=15\times27-120\times9+500\times3+750=405-1080+1500+750=405+420+750=1575$

La recette ,en euro, pour la production de 3 kilomètres de tissu est :

$R(3)=680\times3=2040$

$B(3)=R(3)-C(3)=2040-1575=465$ €

2. $C(x)=15x^3-120x^2+500x+750$ $\qquad R(x)=680x$

$B(x)=680x-15x^3+120x^2-500x-750=-15x^3+120x^2+180x-750$

3. $B'(x)=-15\times(x^2)+120\times(2x)+180=-45x^2+240x+180$

4. $B'(x)=-45x^2+240x+180=15(-3x^2+16x+12)$

Le signe de $B'(x)$ est le signe de $T(x)=3x^2+16x+12$ sur [1;10].

$T(x)=-3x^2+16x+12 \qquad \Delta=16^2-4\times(-3)\times12=256+144=400=20^2$

$x_1=\dfrac{-16+20}{2\times(-3)}=\dfrac{4}{-6}=-\dfrac{2}{3} \qquad x_2=\dfrac{-16-20}{2\times(-3)}=\dfrac{-36}{-6}=6$

Le coefficient de x^2 est négatif.

On donne les signes de $T(x)$ et $B'(x)$ sous la forme d'un tableau.

x	-∞	$-\frac{2}{3}$		0		6		10		+∞
T(x)	−	0	+		+	0	−		−	

Tableau de variation de B

x	0		6		10
B'(x)		+	0	−	
B(x)	-750	↗	1410	↘	-1950

$B(0)=-750$

$B(6)=-15\times6^3+120\times6^2+180\times6-750=-15\times216+120\times36+180\times6-750=-3240+4320+1080-750$

$B(6)=5400-3990=1410$

$B(10)=-15\times1000+120\times100+180\times10-750=-15000+12000+1800-750$

$B(10)=-15750+13800=-1950$.

5. Il faut produire 6 kilomètres de tissu pour obtenir le résultat maximal de 1410€.