Sujet 16

EXERCICE 1 (5 points)

Cet exercice est un QCM et comprend cinq questions.
Pour chacune des questions, une seule des quatre réponses proposées est correcte.
Les questions sont indépendantes.
Pour chaque question, indiquer le numéro de la question et recopier la lettre correspondant à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée, mais il peut être nécessaire d'effectuer des recherches au brouillon pour aider à déterminer votre réponse.
Chaque réponse correcte rapporte un point. Une réponse incorrecte ou une question sans réponse n'apporte ni ne retire aucun point.

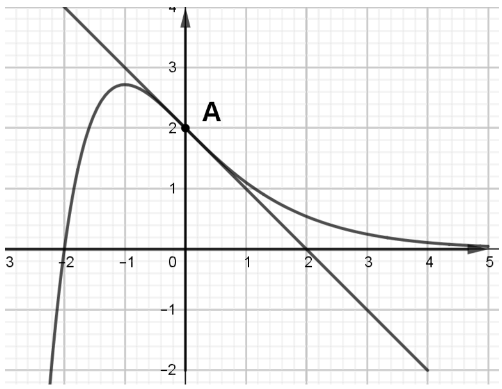
Question 1

EFG est un triangle telque : EF=8, FG=5 et $\widehat{EFG}=\frac{3\pi}{4}$ alors $\overrightarrow{FE}.\overrightarrow{FG}$ est égal à :

a) $20\sqrt{2}$	b) $-20\sqrt{2}$	c) $20\sqrt{3}$	d) $-20\sqrt{3}$

Question 2

Dans un repère orthonormé, on a tracé la courbe représentative de f et sa tangente au point A d'abscisse 0.



On note f' la dérivée de la fonction f.
On a :

a) f '(0)=2	b) f '(0)=-1	c) f '(2)=-1	d) f '(-2)=0

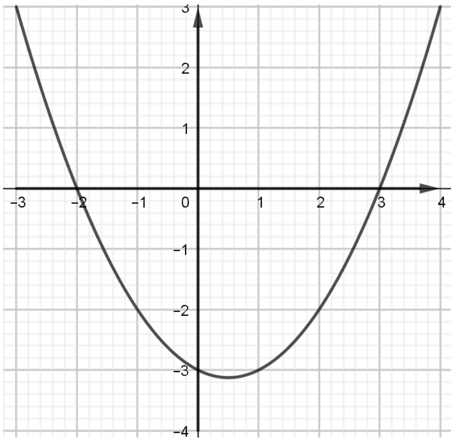
Question 3

On se place dans un repère orthonormé du plan
Une équation du cercle de centre B(2;3) et de rayon 4 est :

a) $(x+2)^2+(y+3)^2=4$	b) $(x-2)^2+(y-3)^2=16$
c) $(x-2)^2+(y-3)^2=4$	d) $(x+2)^2+(y+3)^2=16$

Question 4

On se place dans un repère orthonormé du plan.
On a tracé en dessous la courbe représentative d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.



L'équation $f(x)=-3$ a pour solution (s) :

a) **3**	**b)** **0**	**c)** **-3**	**d)** **0 et 3**

Question 5

Un vecteur normal à la droite d'équation cartésienne : $-3x-2y+5=0$ est :

a $\vec{n}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$	**b** $\vec{n}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$	**c** $\vec{n}\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$	**d** $\vec{n}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

CORRECTION

Question 1 Réponse : d

Preuve non demandée

$\overrightarrow{FE}.\overrightarrow{FG}=FE\times FG\times\cos(\widehat{EFG})=8\times5\times\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)=40\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-20\sqrt{2}$

Question 2 Réponse : b

Preuve non demandée

$f'(0)$ est égal au coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse A.

Cette tangente passe par les points A(0;2) et B(2;0) donc $f'(0)=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{0-2}{2-0}=-1$

Question 3 Réponse : c

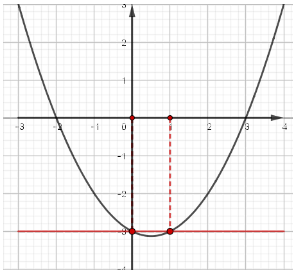
Preuve non demandée

Une équation cartésienne du cercle de centre I(a;b) et de rayon R>0 est : $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$.
Ici on obtient : $(x-2)^2+(y-3)^2=4^2=16$.

Question 4 Réponse : d

Preuve non demandée

Les solutions de l'équation $f(x)=-3$ sont les abscisses des points d'intersection de la courbe représentative de f et de la droite d'équation $y=-3$.



On obtient : 0 et 1.

Question 5 Réponse : d

Preuve non demandée

$\vec{N}\begin{pmatrix}-3\\-2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à la droite d'équation : $-3x-2y+5=0$.

$\vec{n}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ est le seul vecteur colinéaire au vecteur $\vec{N}$.

EXERCICE 2 (5 points)

Partie A

On considère la fonction polynôme du second degré P définie sur $\mathbb{R}$ par :
$\mathrm{P}(x)=x^2-7x+6$

1. Résoudre l'équation : $\mathrm{P}(x)=0$.

2. Étudier le signe de P sur $\mathbb{R}$.

Partie B

On considère la fonction polynôme du troisième degré f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$\mathrm{f}(x)=2x^3-21x^2+36x$

1. Calculer la dérivée f' de f et vérifier que $\mathrm{f}'(x)=6\mathrm{P}(x)$.

2. Étudier les variations de la fonction f.

3. On se place dans un repère du plan.
Déterminer une équation de la tangente T à la courbe représentative de f au point d'abscisse 3.

CORRECTION

Partie A

1. $P(x)=x^2-7x+6=0$

$\Delta=(-7)^2-4\times1\times6=49-24=25=5^2$

$x_1=\dfrac{7-5}{2\times1}=\dfrac{2}{2}=1$ $\qquad$ $x_2=\dfrac{5+7}{2\times1}=\dfrac{12}{2}=6$

$\mathscr{S}=\{\,1\,;6\,\}$

2. $P(x)=x^2-7x+6$

Le coefficient de x^2 est positif.

On donne le signe de P(x) sous la forme d'un tableau.

X	-∞		1		6		+∞
P(x)		+	0	–	0	+	

Partie B

1. $f(x)=2x^3-21x^2+36x$

$f'(x)=2\times(3x^2)-21\times(2x)+36=6x^2-42x+36$

$f'(x)=6(x^2-7x+6)=6P(x)$

2. $6>0$ donc $f'(x)$ et P(x) sont de mêmes signes sur $\mathbb{R}$.

On donne les variations de f sous la forme d'un tableau.

x	-∞		1		6		+∞
f '(x)		+	0	–	0	+	
f(x)		↗	17	↘	-108	↗	

$f(1)=17$ $\qquad$ $f(6)=432-756+216=-108$

3. La tangente T à la courbe représentative de f au point B d'abscisse 3 est la droite passant par $B(3;f(3))$ et de coefficient directeur $f'(3)$.

$f(3)=54-189+108=-27$ $\qquad$ $B(3;-27)$.

$f'(3)=6\times P(3)=6\times(9-21+6)=-36$

$T:\ y-y_B=f'(x_B)(x-x_B)$

$T:\ y+27=-36\times(x-3)$

$T:\ y=-36x+81$

EXERCICE 3 (5 points)

Une chaîne de coiffure propose à ses 5000 clients qui viennent pour une coupe deux prestations supplémentaires cumulables.

- une coloration naturelle aux plantes, appelée « couleur soin »,
  des mèches blondes pour donner du relief à la chevelure, appelées « effet coup de soleil ».

Il apparaît que 2000 clients demandent une « couleur soin ».
Parmi ceux qui ne veulent pas de « couleur soin », 900 clients demandent un « effet coup de soleil ».
Par ailleurs 650 clients demandent une « couleur soin » et un effet coup de soleil ».

1. Recopier sur votre copie et compléter le tableau suivant :

	C	$\bar{C}$	TOTAL
E		900	
$\bar{E}$			
TOTAL			5000

2. On interroge un client au hasard parmi les 5000 clients.

2.a. Quelle est la probabilité qu'il ait choisi les deux prestations : « couleur soin » et « effet coup de soleil ».

2.b. Calculer $P_E(\bar{C})$.

3. On a des prix différents suivant la prestation fournie.
On appelle X le prix payé en euros par chaque client.

	coupe seule	coupe avec "couleur soin"	coupe avec "effet coup de soleil"	coupe avec "couleur soin" et "effet coup de soleil"
valeur de k en €	20	50	65	80
P(X=k)			0.18	0.13

Après avoir recopié le tableau, calculer l'espérance mathématique de X.

CORRECTION

1. On place les données de l'énoncé non déjà écrites dans le tableau:2000 et 650 (en bleu).
Et on complète le tableau par les nombres (en rouge) obtenus par addition ou soustraction.

	C	$\bar{C}$	TOTAL
E	650	900	1550
$\bar{E}$	1350	2100	3450
TOTAL	2000	3000	5000

2.a. $P(E\cap C)=\frac{650}{5000}=\frac{13}{100}=0{,}13$

2.b. $P_E(\bar{C})=\frac{P(E\cap\bar{C})}{P(E)}$

$P(E\cap\bar{C})=\frac{900}{5000}=0{,}18 \qquad P(E)=\frac{1550}{5000}=0{,}31$

$P_E(\bar{C})=\frac{18}{31}=0{,}59$ (arrondi au centième).

3. On complète le tableau :

$P(X=20)=P(\bar{C}\cap\bar{E})=\frac{2100}{5000}=0{,}42 \qquad P(X=50)=P(C\cap\bar{E})=\frac{1350}{5000}=0{,}27$

	coupe seule	coupe avec "couleur soin"	coupe avec "effet coup de soleil"	coupe avec "couleur soin" et "effet coup de soleil"
valeur de k en €	20	50	65	80
P(X=k)	0.42	0.27	0.18	0.13

$E(X)=20\times0{,}42+50\times0{,}27+65\times0{,}18+80\times0{,}13=8{,}4+13{,}5+11{,}7+10{,}4$

$E(X)=44$

EXERCICE 4 (5 points)

Un apiculteur souhaite étudier son activité de production de miel à une nouvelle région.
Au printemps 2019, il achète 300 colonies d'abeilles qu'il installe dans cette région.
Il consulte les services spécialisés de la région et s'attend à perdre 8 % des colonies chaque hiver.
Pour maintenir son activité et la développer, il prévoit d'installer 50 nouvelles colonies chaque printemps, à partir de l'année suivante.

1. On donne le programme suivant écriten langage Python :

```
def algo():
  C=300
  N=0
  while C<400:
    C=C*0.92+50
    N=N+1
  return (N)
```

1.a. Recopier et compléter en ajoutant des colonnes, le tableau ci-dessous qui reproduit l'avancement du programme pas à pas.
Les valeurs seront arrondies à l'entier le plus proche.

C	300	326	. . . .	
"C<400"	oui	oui	. . . .	

1.b. Quelle est la valeur de N renvoyée par le programme ?
Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

Le nombre de colonies est modélisé par une suite.
On note C_n une estimation du nombre de colonies au printemps de l'année 2019+n.
Ainsi $C_0=300$ est le nombre de colonies au printemps 2019.
On admet que pour tout entier naturel n, on a : $C_{n+1}=0,92C_n+50$.

2. La suite (C_n) est-elle arithmétique ? La suite (C_n) est-elle géométrique ?

3. On admet que $C_n=625-325\times 0,92^n$ pour tout entier naturel n.
L'apiculteur pourra-t-il atteindre les 700 colonies ?

CORRECTION

1.a. N=0 $C = 300$

N=1 $C = 300 \times 0{,}92 + 50 = 326$

N=2 $C = 326 \times 0{,}92 + 50 = 349{,}92$ (350 arrondi à l'unité)

N=3 $C = 349{,}92 \times 0{,}92 + 50 = 371{,}9264$ (372 arrondi à l'unité)

N=4 $C = 371{,}9264 \times 0{,}92 + 50 = 392{,}172288$ (392 arrondi à l'unité)

N=5 $C = 392;172288 \times 0{,}92 + 50 = 410{,}798505$ (411 arrondi à l'unité)

C	300	326	350	372	392	411
"C<400"	oui	oui	oui	oui	oui	non

1.b. Au printemps $2019+5=2024$, le nombre de colonies d'abeilles sera supérieure à 400 pour la première année.

2. $C_0 = 300$, $C_1 = 326$ et $C_2 = 349{,}92$

. $\dfrac{C_0 + C_2}{2} = \dfrac{326 + 349{,}92}{2} = \dfrac{675{,}92}{2} = 337{,}96 \neq C_1$ donc la suite (C_n) n'est pas une suite arithmétique.

. $C_0 \times C_2 = 300 \times 349{,}92 = 104976$

$C_1^2 = 106278 \neq C_0 \times C_2$ donc la suite (C_n) n'est pas une suite géométrique.

3. Pour tout entier naturel n, $C_n = 625 - 325 \times 0{,}92^n$.

Pour tout entier naturel naturel n, $325 \times 0{,}92^n > 0$ donc $625 - 325 \times 0{,}92^n < 625$.

Et $C_n < 625$.

L'apiculteur ne pourra pas atteindre les 700 colonies.