Sujet 17

EXERCICE 1 (5 points)

Cet exercice est un QCM et comprend cinq questions.
Pour chacune des questions, une seule des quatre réponses proposées est correcte.
Les questions sont indépendantes.
Pour chaque question, indiquer le numéro de la question et recopier la lettre correspondant à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée, mais il peut être nécessaire d'effectuer des recherches au brouillon pour aider à déterminer votre réponse.
Chaque réponse correcte rapporte un point. Une réponse incorrecte ou une question sans réponse n'apporte ni ne retire aucun point.

Question 1

On considère la loi de probabilité de la variable aléatoire X donnée par le tableau ci-dessous.

k	-5	0	10	20	50
P(X=k)	0.71	0.03	0.01	0.05	0.2

L'espérance mathématique de X est :

a) 15	b) 0.2	c) 7.55	d) 0.7

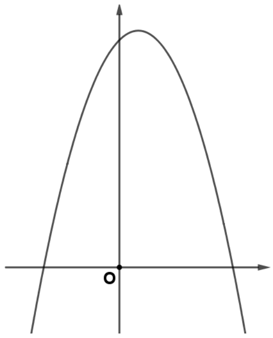
Question 2

On se place dans un repère orthonormé.
Le cercle de centre A(-2;4) et de rayon 9 a pour équation

a) $(x+2)^2+(y-4)^2=81$	b) $(x-2)^2+(y+4)^2=81$
c) $(x+2)^2+(y-4)^2=9$	d) $(x-2)^2+(y+4)^2=9$

Question 3

Soit f la fonction définie par : $f(x)=ax^2+bx+c$ où a, b et c sont des réels.
On considère dans un repère la courbe représentative de f tracée ci-dessous.



On note Δ son discriminant.
On peut affirmer que :

a) a>0 ou c<0	b) c et Δ sont de même signe	c) a<0 et c<0	d) a<0 et Δ<0

Question 4

On considère la suite (U_n) définie par $U_0 = -2$ et $U_{n+1} = 2U_n - 5$.
Un algorithme permettant de calculer la somme $S = U_0 + U_1 + \ldots + U_{36}$ est :

a	b	c	d
U=-2 S=0 Pour i de 1 à 37 U ← 2U-5 S ← S+U Fin Pour	U=-2 S=0 Pour i de 1 à 36 U ←2U-5 S ← S+U Fin Pour	U=-2 S=-2 Pour i de 1 à 37 S ← S+U U ← 2U-5 Fin Pour	U=-2 S=-2 Pour i de 1 à 36 U ← 2U-5 S=S+U Fin pour

Question 5

La suite (U_n) définie par $U_0 = -2$ et $U_{n+1} = 2U_n - 5$ est :

a)	arithmétique mais pas géométrique	b)	géométrique mais pas arithmétique	c)	ni arithmétique ni géométrique	d)	à la fois arithmétique et géométrique

CORRECTION

Question 1 Réponse : c

Preuve non demandée

$E(X)=-5\times 0{,}71+0\times 0{,}03+10\times 0{,}01+20\times 0{,}05+50\times 0{,}2=-3{,}55+0{,}1+1+10$

$E(X)=11{,}1-3{,}55=7{,}55$

Question 2 Réponse : a

Preuve non demandée

a, b et R sont des nombres réels et R>0.

Le cercle de centre A(a;b) et de rayon R a pour équation $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$.

Si

a=-2, b==4 et R=9 alors $(x+2)^2+(y-4)^2=9^2=81$.

Question 3 Réponse : b

Preuve non demandée

$f(x)=ax^2+bx+c$

graphiquement : f admet un maximum donc a est négatif, la courbe coupe l'axe des abscisses en deux points donc Δ est positif et l'ordonnée c du point d'intersection de la courbe et de l'axe des ordonnées est positive.

Donc c et Δ sont de même signe.

Question 4 Réponse : d

Preuve non demandée

- Algorithme a

  pour $i=1$ on a $U=-9=U_1$ et $S=0-9=U_1$

  pour $i=37$ on a $U=U_{37}$ et $S=U_1+U_2+\ldots+U_{37}\neq U_0+U_1+\ldots+U_{36}$ car $U_{37}\neq U_0=-2$
- Algorithme b

  pour $i=1$ on a $U=-9=U_1$ et $S=0-9=U_1$

  pour $i=36$ on a $U=U_{36}$ et $S=U_1+U_2+\ldots+U_{36}\neq U_0+U_1+\ldots+U_{36}$ car $U_0=-2\neq 0$
- Algorithme c

  pour $i=1$ on a $S=-2-2=-4=2U_0$ et $U=-9=U_1$

  pour $i=37$ on a $S=2U_0+U_1+\ldots+U_{36}\neq U_0+U_1+\ldots+U_{36}$ car $U_0=-2\neq 0$
- Algorithme d

  Pour $i=1$ on a $U=-9=U_1$ et $S=-2+U_1=U_0+U_1$

  Pour $i=36$ on a $U=U_{36}$ et $S=U_0+U_1+\ldots+U_{36}$

Question 5 Réponse : c

Preuve non demandée

$U_0=-2$; $U_1=-9$ et $U_3=-23$

- $\dfrac{U_0+U_2}{2}=\dfrac{-25}{2}\neq -9=U_1$ donc la suite (U_n) n'est pas une suite arithmétique.

  Rappel

  (v_n) est une suite arithmétique si et seulement pour tout entier naturel n, $\dfrac{u_n+u_{n+2}}{2}=u_{n+1}$

  c'est à dire u_{n+1} est la moyenne arithmétique de u_n et u_{n+2} .
- $U_0\times U_2=-2\times(-23)=46\neq(-9)^2=81$ donc la suite (U_n) n'est pas une suite géométrique.

  Rappel

  (v_n) est une suite géométrique si et seulement si pour tout entier naturel n, $v_n\times v_{n+2}=v_{n+1}^2$

  c'est à dire $|u_{n+1}|$ est la moyenne géométrique de $|u_n|$ et $|u_{n+2}|$.
- (U_n) est ni arithmétique ni géométrique.

EXERCICE 2 (5 points)

La fonction f est définie sur $]-1;+\infty[$;

$$f(x)=\frac{x^2+1}{x+1}$$

On se place dans un repère orthonormé du plan.

1. Démontrer que pour tout x appartenant à $]-1;+\infty[$!

$$f'(x)=\frac{x^2+2x-1}{(x+1)^2}$$

2. Déterminer le sens de variation de la fonction f sur $]-1;+\infty[$.

3. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0.

4. Étudier la position relative de la courbe représentative de f et de la droite d'équation $y=x$.

CORRECTION

1. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \times v - u \times v'}{v^2}$

$u(x)=x^2+1$ $\qquad u'(x)=2x$

$v(x)=x+1$ $\qquad v'(x)=1$

$f'(x)=\dfrac{2x\times(x+1)-(x^2+1)\times 1}{(x+1)^2}=\dfrac{2x^2+2x-x^2-1}{(x+1)^2}=\dfrac{x^2+2x-1}{(x+1)^2}$

2. Pour tout réel x de l'intervalle $]-1;+\infty[$, $(x+1)^2>0$ donc le signe de $f'(x)$ sur $]-1:+\infty[$ est le signe de $N(x)=x^2+2x-1$.

$\Delta=2^2-4\times1\times(-1)=4+4=8=(2\sqrt{2})^2$

$N(x)$ admet deux racines.

$x_1=\dfrac{-2-2\sqrt{2}}{2}=-1-\sqrt{2}$ $\qquad x_2=\dfrac{-2+2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}-1$.

On a $x_1 < -1 < x_2$ et le coefficient de x^2 dans $N(x)$ est positif, donc :

x	$-\infty$		x_1		-1		x_2		$+\infty$
N(x)		+	0	−		−	0	+	

On donne les variations de f sous la forme d'un tableau.

x	-1		$\sqrt{2}-1$		$+\infty$
f '(x)	‖	−	0	+	
f(x)	‖	↘	$2\sqrt{2}-2$	↗	

$f(\sqrt{2}-1)=\dfrac{(\sqrt{2}-1)^2+1}{\sqrt{2}-1+1}=\dfrac{2-2\sqrt{2}+1+1}{\sqrt{2}}=\dfrac{4-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\dfrac{(4-2\sqrt{2})\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\dfrac{4\sqrt{2}-4}{2}=2\sqrt{2}-2$

3. $f(0)=1$ $\qquad$ A(0;1)

T est la tangente à la courbe représentative de f au point A donc l'ordonnée à l'origine de T est : 1.

$f'(0)=-1$ donc le coefficient directeur de T est -1.

$T:\ y=-x+1$

4. Pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $]-1;+\infty[$; on note $M(x;f(x))$ le point de la courbe $\mathscr{C}$ représentative de f et $N(x;x)$ le point de la droite D d'équation $y=x$.

$\overrightarrow{NM}\begin{pmatrix}0\\ f(x)-x\end{pmatrix}$

Si $f(x)-x>0$ alors le point M est au dessus du point N.

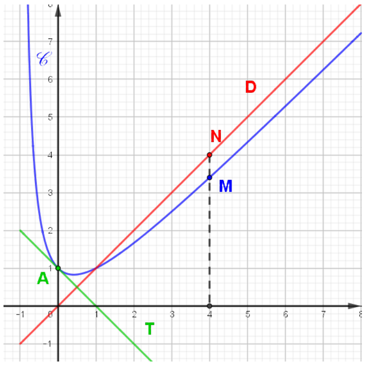
Si $f(x)-x<0$ alors le point M est en dessous du point N.

$f(x)-x=\dfrac{x^2+1}{x+1}-x=\dfrac{x^2+1-x^2-x}{x+1}=\dfrac{1-x}{x+1}$

Pour tout nombre réel x de l'intervalle $]-1;+\infty[$, $x+1>0$ donc le signe de $f(x)-x$ sur l'intervalle $]-1;+\infty[$ est le signe de $1-x$.

x	-1		1	+∞
f(x)-x	‖	+	0	−
position de $\mathscr{C}$ par rapport à D	‖	$\mathscr{C}$ est au dessus de D		$\mathscr{C}$ est en dessous de D

On donne une figure non demandée.



EXERCICE 3 (5 points)

Un jeu consiste à combattre en duel soit le monstre A, soit le monstre B.
On a une probabilité de $\frac{4}{5}$ d'affronter le monstre A.
Le joueur gagne contre le monstre A dans 30 % des cas et contre le monstre B dans 25 % des cas.
Le joueur lance une partie.On considère les événements suivants.
. A : « Le joueur affronte le monstre A. »
. B : « Le joueur affronte le monstre B. »
. V : « Le joueur est victorieux. »

1. Déterminer $P_B(\bar{V})$ et interpréter le résultat.

2. Montrer que $P(B \cap V) = \frac{1}{20}$

3. Calculer $P(V)$.

4. Calculer la probabilité d'avoir combattu le monstre B sachant que le joueur est victorieux.

CORRECTION

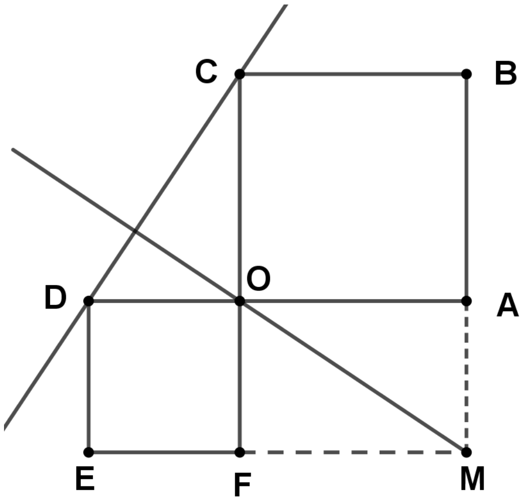
1. L'énoncé précise :
Le joueur gagne contre le monstre B dans 25 % des cas, donc :
$P_B(V)=0,25=\frac{1}{4}$ et $P_B(\bar{V})=1-P_B(V)=1-0,25=0,75=\frac{3}{4}$.
La probabilité que le joueur perde le combat sachant qu'il a affronté le monstre B est égale à : $\frac{3}{4}=0,75$

2. On a : $B=\bar{A}$.
Le joueur a une probabilité de $\frac{4}{5}$ d'affronter le monstre A, donc :
$P(A)=\frac{4}{5}=0,8$ et $P(B)=1-P(A)=1-\frac{4}{5}=\frac{1}{5}=0,2$.
$P(B\cap V)=P(B)\times P_B(V)=\frac{4}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{20}=0,05$.

3. En utilisant la formule des probabilités totales :
$P(V)=P(B\cap V)+P(A\cap V)$.
L'énoncé précise :
le joueur gagne contre le monstre A dans 30 % des cas, donc : $P_A(V)=0,3=\frac{3}{10}$.
$P(A\cap V)=P(A)\times P_A(V)=\frac{4}{5}\times\frac{3}{10}=\frac{12}{50}=\frac{6}{25}=0,24$
$P(V)=0,05+0,24=0,29=\frac{29}{100}$.

4. $P_V(B)=\frac{P(V\cap B)}{P(V)}=\frac{0,05}{0,29}=\frac{5}{29}$.

EXERCICE 4 (5 points)



OABC et ODEF sont des carrés de côtés respectifs 3 et 2. OAMF est un rectangle.
On note H le projeté orthogonal du point M sur la droite (DC).

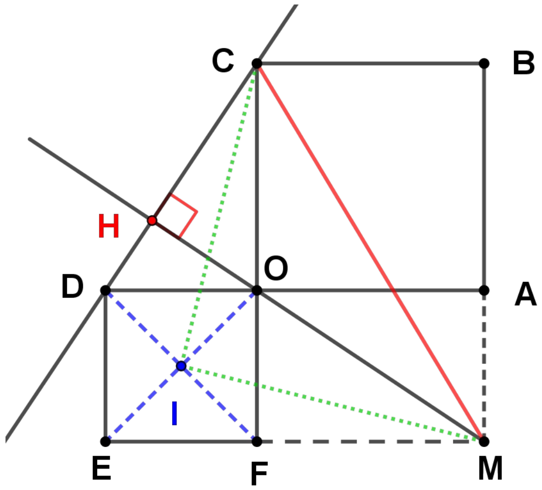
Dans cet exercice, on pourra si on le souhaite, se placer dans le repère $\left(O ; \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} ; \frac{1}{3}\overrightarrow{OC}\right)$.

1. La droite (OM) est-elle perpendiculaire à la droite (DC) ?

2. Calculer $\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{CM}$

3. Déterminer la longueur CH.

CORRECTION



1. Le repère $\left(O; \frac{1}{3}\overrightarrow{OA}; \frac{1}{3}\overrightarrow{OC}\right)$ est orthonormé. On donne les coordonnées des points de la figure donnée.

O(0;0), A(3;0), B(3;3), C(0;3), D(-2;0), E(-2 ;-2), F(0 ;-2) et M(3 ;-2).

$\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$ $\quad\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-2\\-3\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{CD}=3\times(-2)+(-2)\times(-3)=0$.

Les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont orthogonaux.

Les droites (OM) et (CD) sont perpendiculaires et H est le point d'intersection des droites (OM) et (CD).

2. $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-2\\-3\end{pmatrix}$ $\quad\overrightarrow{CM}\begin{pmatrix}3\\-5\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{CM}=-2\times3+(-3)\times(-5)=9$

3. H est le projeté orthogonal de M sur (CD) donc $\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{CH}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{CH}$ sont colinéaires et de même sens donc $\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{CH}=CD\times CH=9$.

Le triangle OCD est rectangle en O.

$OC^2+OD^2=CD^2=3^2+2^2=13$ et $CD=\sqrt{13}$

$CD\times CH=9 \quad\Leftrightarrow\quad CD=\frac{9}{CD}=\frac{9}{\sqrt{13}}$.

Remarque :

Si I est le centre du carré ODEF et r est la rotation de centre L et d'angle $\frac{\pi}{2}$ alors on peut facilement démontrer que r(E)=F, r(F)=O et r(O)=D donc l'image par r de la droite (EF) est la droite (FO).
M appartient à la droite (EF) donc r(M)=M' appartient à la droite (FO).
FM=OM'=3=OC donc M'=C.
L'image de la droite (OM) est la droite (DC).
L'angle de la rotation est $\frac{\pi}{2}$ donc les droites (OM) et CD) sont perpendiculaires .
H est le projeté orthogonal de M sur (CD).
On détermine l'aire du triangle DOC rectangle en O.

$\mathscr{A}=\frac{1}{2}\times OC\times OD=\frac{1}{2}\times3\times2=3=\frac{1}{2}\times CD\times OH=\frac{1}{2}\times\sqrt{13}\times OH$ donc $OH=\frac{6}{\sqrt{13}}$.

Le triangle OHC est rectangle en H

$OH^2+CH^2=OC^2 \quad\Leftrightarrow\quad CH^2=OC^2-OH^2 \quad\Leftrightarrow\quad CH^2=3^2-\frac{36}{13}=\frac{117-36}{13}=\frac{81}{13} \qquad CH=\frac{9}{\sqrt{13}}$.