Sujet 18

EXERCICE 1 (5 points)

Cet exercice est un QCM et comprend cinq questions.
Pour chacune des questions, une seule des quatre réponses proposées est correcte.
Les questions sont indépendantes.
Pour chaque question, indiquer le numéro de la question et recopier la lettre correspondant à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée, mais il peut être nécessaire d'effectuer des recherches au brouillon pour aider à déterminer votre réponse.
Chaque réponse correcte rapporte un point. Une réponse incorrecte ou une question sans réponse n'apporte ni ne retire aucun point.

1. Soit P une probabilité sur un univers Ω et A et B deux événements indépendants tels que :
$P(A)=0,5$ et $P(B)=0,2$
Alors $P(A\cup B)$ est égal à :

a) 0.1	b) 0.7	c) 0.6	d) on ne peut pas savoir

2. La valeur arrondie au centième de : $1+1,2+1,2^2+1,2^3+\ldots+1,2^{10}$ est :

a) 3.27	b) 25.96	c) 26.96	d) 32.15

3. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\dfrac{x}{e^x}$.

Pour tout nombre réel x, $f(x)$ est égal à :

a) $f(x)=\dfrac{e^{-x}}{-x}$	b) $f(x)=xe^{-x}$	c) $f(x)=-xe^{-x}$	d) $f(x)=\dfrac{e^{-x}}{x}$

4. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=(2x-5)e^x$.
On admet que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note g' sa fonction dérivée.
Alors pour tout réel x, $g'(x)$ est égal à :

a) $(2x-3)e^x$	b) $(-2x+7)e^x$	c) $2e^x$	d) $-5e^x$

5. Le nombre $\dfrac{e^3\times e^{-5}}{e^2}$ est égal à :

a) -1	b) $e^{-\frac{15}{2}}$	c) $\dfrac{1}{e^4}$	d) $\dfrac{3e^{-5}}{2}$

CORRECTION

1. Réponse : c

Preuve non demandée

A et B sont des événements indépendants donc $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)=0{,}5\times 0{,}2=0{,}1$.

Et $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0{,}5+0{,}2-0{,}1=0{,}6$.

2. Réponse : d

Preuve non demandée

$1+1{,}2+1{,}2^2+1{,}2^3+\ldots+1{,}2^{10}$ est la somme des 11 premiers termes de la suite géométriques de premier terme 1 et de raison $q=1{,}2$.

$$S=\frac{1-12^{10}}{1-1{,}2}=\frac{1{,}2^{11}-1}{0{,}2}$$

En utilisant la calculatrice on obtient : 32,15 arrondie au centième.

3. Réponse : c

Preuve non demandée

$$\frac{1}{e^x}=e^{-x} \qquad \frac{x}{e^x}=x\,e^{-x}$$

4. Réponse : a

Preuve non demandée

$(u\times v)'=u'\times v+u\times v'$

$u(x)=2x-5 \qquad u'(x)=2$

$v(x)=e^x \qquad v'(x)=e^x$

$g'(x)=2\times e^x+(2x-5)\times e^x=(2x-5+2)e^x=(2x-3)e^x$

5. Réponse : c

Preuve non demandée

$$e^3\times e^{-5}=e^{3-5}=e^{-2}=\frac{1}{e^2}$$

$$\frac{e^3\times e^{-5}}{e^2}=\frac{1}{e^2}\times\frac{1}{e^2}=\frac{1}{e^4}$$

EXERCICE 2 (5 points)

Une banque propose un placement. Le compte est rénuméré et rapporte 5 % par an. La banque prend des frais de gestion qui se montent à 12 euros par an.
Ainsi, chaque année la somme sur le compte augmente de 5 % puis la banque prélève 12 euros.
Noémie place la somme de 1000 euros dans cette banque.
On appelle u_n la somme disponible sur le compte en banque de Noémie après n années, où n désigne un entier naturel.
On a donc $u_0=1000$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=1{,}05u_n-12$.

1. Avec un tableur, on a calculé les premiers termes de la suite (u_n) :

	A	B
1	n	u_n
2	0	1000.00
3	1	1038.00
4	2	1077.90
5	3	1119.80
6	4	1163.78
7	5	1209.97
8	6	1258.48
9	7	1309.40
10	8	1362.87
11	9	1419.01
12	10	1477.96
13	11	1539.86

1.a. Quelle formule a-t-on entrée dans la cellule B3 avant détirer pour obtenir ces résultats ?

1.b. En utilisant les valeurs calculées de la suite, indique à Noémie, combien de temps elle doit attendre pour que son placement lui rapporte 20 %.

On pose (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n, par $v_n=u_n-240$.

2. Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 1,05.

3. Exprimer v_n puis u_n en fonction de l'entier n.

4. Calculer à partir de cette dernière formule la somme disponible après 20 ans de placement.

CORRECTION

1.a. =B2*1,05-12

1.b. Il faut 5 ans pour que le placement de Noémie lui rapporte 20 %.

Car $1000+\frac{20}{100}\times 1000=1200$.

Or $u_5=1209{,}9>1200$ et $u_4=1163{,}78<1200$.

2. Pour tout entier naturel n on a :

$u_{n+1}=1{,}05u_n-12$ et $v_n=u_n-240$ (ou $u_n=v_n+240$).

$v_{n+1}=u_{n+1}-240=1{,}05u_n-12-240=1{,}05(v_n+240)-252=1{,}05v_n+1{,}05\times 240-252$

$v_{n+1}=1{,}05v_n+252-252=1{,}05v_n$

Donc la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 1,05.

3. $v_0=u_0-240=1000-240=760$.

Pour tout entier naturel n :

$v_n=v_0\times q^n=760\times 1{,}05^n$

Et $u_n=v_n+240=240+760\times 1{,}05^n$

4. $u_{20}=240+760\times 1{,}05^{20}=2256{,}51$

EXERCICE 3 (5 points)

Dans cet exercice toutes les probabilités seront données sous forme décimale, arrondie au millième.
Une entreprise récupère des smartphones endommagés, les répare et les reconditionne afin de les revendre à prix réduit.

- 40 % des smartphones qu'elle récupère ont un écran cassé ;
- parmi les smartphones ayant un écran cassé, 30 % ont égaleme t une batterie défectueuse ;
- par contre, seulement 20 % des smartphones ayant un écran non cassé ont une batterie défectueuse.

1. Un technicien chargé de réparer et reconditionner les smartphones de l'entreprise prend un smartphone au hasard du stock. On note :

- E l'événement : « le smartphone choisi a un écran cassé »
- B l'événement : « le smartphone choisi a une batterie défectueuse ».

1.a. Représenter la situation décrite ci-dessus par un arbre pondéré.

1.b. Démontrer que la probabilité que le smartphone choisi ait une batterie défectueuse est égale à 0,245.

1.c. Sachant que le smartphone choisi a une batterie défectueuse quelle est la probabilité qu'il ait un écran cassé ?

2. L'entreprise dépense 20€ pour réparer et reconditionner chaque smartphone qu'elle récupère.
Si l'écran est cassé, elle dépense 30€ supplémentaires et si la batterie est défectueuse, elle dépense 40€ supplémentaires.
On note X la variable aléatoire égal au coût total de réparation et reconditionnement d'un smartphone choisi au hasard dans le stock.

2.a. Recopier et compléter sur la copie (aucune justification n'est attendue) le tableau suivant pour donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

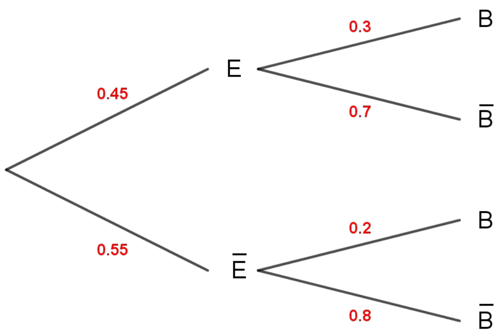
x_i	20	50	...	...
$P(X=x_i)$	0.44	...	...	...

2.b. L'entreprise doit réparer et reconditionner 500 smartphones. Combien doit-il s'attendre à dépenser.

CORRECTION

1.a. L'énoncé précise :

- 45 % des smartphones que l'entreprise récupère ont un écran cassé donc :
  $P(E)=0{,}45$ et $P(\bar{E})=1-P(E)1-0{,}45=0{,}55$.
- Parmi les smartphones ayant un écran cassé, 30 % ont aussi une batterie défectueuse donc :
  $P_E(B)=0{,}3$ et $P_E(\bar{B})=1-P_E(B)=1-0{,}3=0{,}7$.
- Par contre, seulement 20 % des smartphones ayant un écran non cassé ont une batterie défectueuse donc :
  $P_{\bar{E}}(B)=0{,}2$ et $P_{\bar{E}}(\bar{B})=1-P_{\bar{E}}(B)=1-0{,}2=0{,}8$.
- On obtient l'arbre pondéré :



1.b. En utilisant la formule des probabilités totales :

$P(B)=P(E\cap B)+P(\bar{E}\cap B)=P(E)\times P_E(B)+P(\bar{E})\times P_{\bar{E}}(B)=0{,}45\times 0{,}3+0{,}55\times 0{,}2$

$P(B)=0{,}135+0{,}110=0{,}245$

1.c. On nous demande de calculer $P_B(E)$.

$P_B(E)=\dfrac{P(E\cap B)}{P(B)}=\dfrac{0{,}135}{0{,}245}=\dfrac{135}{245}=\dfrac{27}{49}=0{,}551$ arrondi à 10^{-3} .

2.a. L'événement : « le smartphone choisi n'a pas l'écran cassé et n'a pas de batterie défectueuse » est l'événement : $(\bar{E}\cap\bar{B})$.

$X(\bar{E}\cap\bar{B})=20$ et $P(X=20)=P(\bar{E}\cap\bar{B})=P(\bar{E})\times P_{\bar{E}}(\bar{B})=0{,}55\times 0{,}8=0{,}44$.

L'événement ; « le smartphone choisi a l'écran cassé et n'a pas de batterie défectueuse » est l'événement : $(E\cap\bar{B})$.

$X(E\cap\bar{B})=20+30=50$ et $P(X=50)=P(E\cap\bar{B})=P(E)\times P_E(\bar{B})=045\times 0{,}7=0{,}315$.

L'événement : « le smartphone choisi n'a pas l'écran cassé et a une batterie défectueuse » est l'événement : $(\bar{E}\cap B)$.

$X(\bar{E}\cap B)=20+40=60$ et $P(X=60)=P(\bar{E}\cap B)=P(\bar{E})\times P_{\bar{E}}(B)=0{,}55\times 0{,}2=0{,}11$.

L'événement : « le smartphone choisi a l'écran cassé et une batterie défectueuse » est l'événement : $(E\cap B)$.

$X(E\cap B)=20+30+40=90$ et $P(X=90)=P(E\cap B)=P(E)\times P_E(B)=0{,}45\times 0{,}3=0{,}135$.

On donne la de probabilité de X sous la forme d'un tableau.

x_i	20	50	60	90
$P(X=x_i)$	0.44	0.315	0.11	0.135

2.b. La dépense moyenne pour la remise en état d'un smartphone est l'espérance mathématique de X.

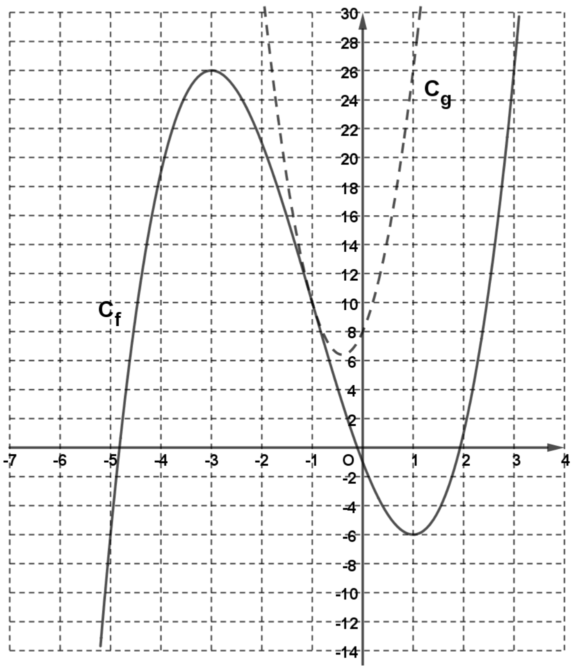
$E(X)=20\times 0{,}44+50\times 0{,}315+60\times 0{,}11+90\times 0{,}135=8{,}80+15{,}75+6{,}60+12{,}14=43{,}29$.

L'entreprise doit s'attendre à dépenser : $43{,}29\times 500=21645$ € .

EXERCICE 4 (5 points)

On donne ci-dessous les représentationns graphiques respectives C_f et C_g de deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.

1. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3+3x^2-9x-1$.
On admet qu'elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée.



1.a. Calculer $f'(x)$.

1.b. Déterminer le signe de $f'(x)$ en fonction du réel x.
En déduire le tableau de variation de la fonction f.

1.c. Déterminer une équation de la droite T tangente à C_f au point d'abscisse -1.

2. La fonction g est une fonction polynôme dusecond degré, donc il existe trois réels a, b et c tels que $g(x)=ax^2+bx+c$ pour tout réel x. On note Δ son discriminant.

2.a. Déterminer, à l'aide du graphique, le signe de a et le signe de Δ .

2.b. La fonction g est définie, pour tout réel x, par $g(x)=10x^2+8x+8$.
Démontrer que les courbes C_f et C_g ont un point commun d'abscisse -1 et qu'en ce point elles ont la même tangente.

CORRECTION

1.a. $f(x)=x^3+3x^2-9x-1$

$f'(x)=3x^2+3\times 2x-9$

$f'(x)=3x^2+6x-9$

1.b. $\delta=6^2-4\times 3\times(-9)=36+108=144=12^2$

$x_1=\dfrac{-6-12}{2\times 3}=\dfrac{-18}{6}=-3$ $\qquad x_2=\dfrac{-6+12}{2\times 3}=\dfrac{6}{6}=1$

Le coefficient de x^2 est positif donc :

$f'(x)$ est positif sur $]-\infty;-3[$ et sur $]1;+\infty[$

$f'(x)$ est négatif sur $]-3;1[$.

Tableau de variation de f

x	-∞		-3		1		+∞
f '(x)		+	0	–	0	+	
f(x)		↗	26	↘	-6	↗	

$f(-3)=-27+27+27-1=26$

$f(1)=1+3-9-1=-6$

1.c. T est la tangente au point d'abscisse -1 de C_f.

$f(-1)=-1+3+9\times 1=10$ $\qquad$ A(-1;10)

Le coefficient directeur de T est $f'(-1)=3-6-9=-12$ donc T : y=-12x+b

T passe par le point A, $10=-12\times(-1)+b$ $\Leftrightarrow$ b=10-12=-2.

T : $y=-12x-2$

2.a. g admet un minimum donc $a>0$.

C_g ne coupe pas l'axe des abscisses donc le polynôme du second degré n'admet pas de racines et $\Delta<0$.

2.b. $g(-1)=10-8+8=10$ donc le point A(-1;10) est commun aux courbes C_f et C_g.

$g(x)=10x^2+8x+8$ $\qquad g'(x)=20x+8$.

Le coefficient directeur de la tangente à C_g est $g'(-1)=20\times(-1)+8=-12$.

La tangente à C_g au point A est la droite passant par A et de coefficient directeur -12 donc la droite T.

Conclusion/

C_f et C_g admettent pour tangente commune la droite T au point A(-1;10).