Sujet 19

EXERCICE 1 (5 points)

Cet exercice est un QCM et comprend cinq questions.
Pour chacune des questions, une seule des quatre réponses proposées est correcte.
Les questions sont indépendantes.
Pour chaque question, indiquer le numéro de la question et recopier la lettre correspondant à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée, mais il peut être nécessaire d'effectuer des recherches au brouillon pour aider à déterminer votre réponse.
Chaque réponse correcte rapporte un point. Une réponse incorrecte ou une question sans réponse n'apporte ni ne retire aucun point.

Question 1

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=2x^2+6x-8$.
Parmi les propositions suivantes, laquelle est juste ?

a)	f(x)=2(x-4)(x+1)	b)	f(x)=(2x+8)(2x-2)
c)	f(x)=2(x+4)(x-1)	d)	f(x)=2(x+3)(x-2)

Question 2

Pour tout réel x, $\frac{(e^x)^2}{e^{-x}}$ est égal à :

a)	e^{x^2+x}	b)	e^{3x}	c)	e^2	d)	e^{-2}

Question 3

Dans le plan muni d'un repère, soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=e^x$.
L'équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0 est :

a)	y=-x-1	b)	y=-x+1	c)	y=x+1	d)	y=x

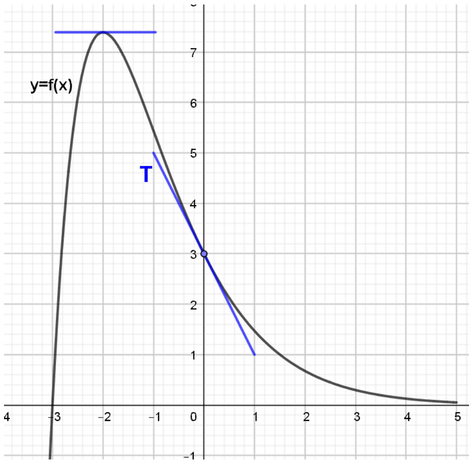
Question 4

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(-x+1)e^x$.
On note f' la fonction dérivée de la fonction f.
Parmi les propositions suivantes, laquelle est juste ?

a)	$f'(x)=-xe^x$	b)	$f'(x)=(x-2)e^x$
c)	$f'(x)=(-x+2)e^x$	d)	$f'(x)=xe^{-x}$

Question 5

Dans le plan muni d'un repère orthogonal, on considère la courbe représentative d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.



Parmi les propositions suivantes, laquelle n'est pas juste ?

a) $f'(-2) = 0$	b) $f'(3) = -2$	c) $f(0) = 3$	d) $f'(0) = -2$

CORRECTION

Question 1 Réponse : c

Preuve non demandée

$f(x)=2x^2+6x-8 \qquad \Delta=6^2-4\times(-8)\times 2=36+64=100=10^2$

$x_1=\dfrac{-6-10}{2\times 2}=\dfrac{-16}{4}=-4 \qquad x_2=\dfrac{-6+10}{2\times 2}=\dfrac{4}{4}=1$

Le coefficient de x^2 est 2 donc $f(x)=2(x+4)(x-1)$

Question 2 Réponse : b

Preuve non demandée

$(e^x)^2=e^x\times e^x=e^{2x} \qquad \dfrac{1}{e^{-x}}=e^{-(-x)}=e^x \qquad \dfrac{(e^x)^2}{e^{-x}}=e^{2x}\times e^x=e^{2x+x}=e^{3x}$

Question 3 Réponse : c

Preuve non demandée

$g(0)=e^0=1$ donc l'ordonnée à l'origine de la tangente à la courbe au point d'abscisse 0 est égale à 1

$g'(0)=e^0=1$ donc le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse 0 est égal à 1.

$y=x+1$

Question 4 Réponse : d

Preuve non demandée

$f(x)=(-x+1)e^x$

$(u\times v)'=u'\times v+u\times v'$

$u(x)=-x+1 \qquad u'(x)=-1$

$v(x)=e^x \qquad v'(x)=e^x$

$f'(x)=-1\times e^x+(-x+1)\times e^x=-x\,e^x$

Question 5 Réponse : b

Preuve non demandée

La courbe admet une tangente horizontale au point d'abscisse -2 donc $f'(-2)=0$. (La réponse a est juste).

La courbe coupel'axe des ordonnées au point de coordonnées (0;3) donc $f(0)=3$. (La réponse c est juste).

La tangente T à la courbe au point d'abscisse 3 passe par le point de coordonnées (1;1).

Le coefficient directeur de T est égal à $\dfrac{3-1}{0-1}=-2$ donc $f'(0)=-2$. (La réponse d est juste).

Donc la seule réponse non juste est : **b.**

EXERCICE 2 (5 points)

On administre à un patient un médicament par injection intraveineuse.
La première injection est de 10 ml, puis toutes les heures on lui injecte 1 ml.
On étudie l'évolution de la quantité de médicament présente dans le sang en prenant le modèle suivant :

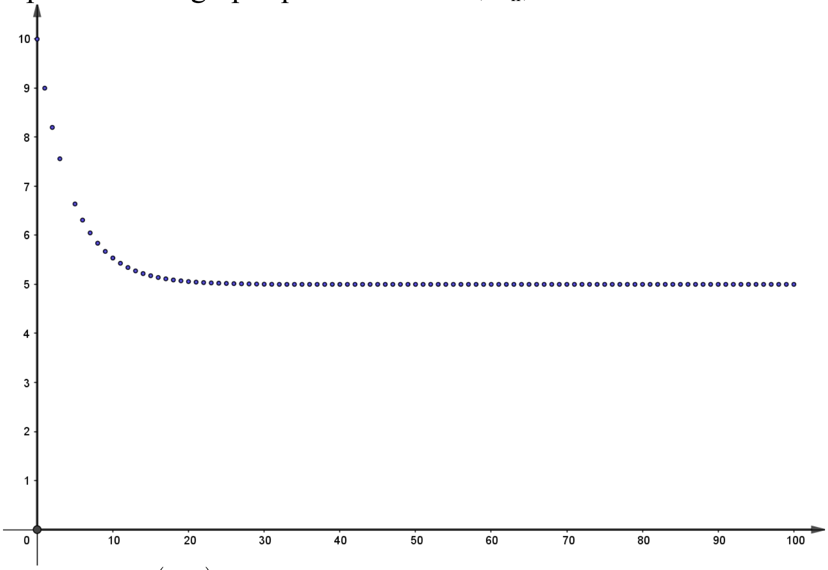
- On estime que 20 % de la quantité de médicament présente dans le sang est éliminée chaque heure.
- pour tout entier naturel n, on note U_n la quantité la quantité de médicament présente dans le sang au bout de n heures.

Ainsi $U_0=10$;

1. Justifier que $U_1=9$

2. Montrer que pour tout entier naturel n, $U_{n+1}=0{,}8\,U_n+1$.

On donne ci-dessous la représentation graphique de la suite (U_n) .



3. Conjecturer la limite de la suite (U_n) .

On considère l'algorithme suivant :

```
U ← 10
N ← 0
Tant que U>5.1 faire
   U ← 0.8*U+1
   N ← N+1
Fin tant que
Afficher N
```

4. À quoi cet algorithme sert-il ?

5. À l'aide du tableau de valeurs de la suite (U_n) donné ci-après, donner la valeur de N à l'issue de l'exécution de l'algorithme.

n	8	9	10	11	12	13	14
U_n	5.838861	5.671089	5.536871	5.429497	5.343597	5.274878	5.219902

n	15	16	17	18	19	20	21
U_n	5.175922	5.140737	5.112590	5.090072	5.072058	5.057646	5.046117

n	22	23	24	25	26	27	28
U_n	5.036893	5.029515	5.023612	5.018889	5.015112	5.012089	5.009671

CORRECTION

1. $U_0=10\ (\text{ml})$

20 % de la quantité de médicament présente dans le sang est éliminée chaque heure.

$10\times\frac{20}{100}=2\ (\text{ml})$

Toutes les heures, on injecte au patient 1 ml.

Donc $U_1=10-2+1=9$.

2. U_n est la quantité de médicament en ml présente dans le sang au bout de n heures.

20 % de la quantité de médicament présente dans le sang est éliminée la $(n+1)^{\text{ième}}$ heure.

$U_n\times\frac{20}{100}=0{,}2\,U_n$.

Au bout de la $(n+1)^{\text{ième}}$ heure on injecte au patient 1 ml.

Donc $U_{n+1}=U_n-0{,}2\,U_n+1=0{,}8\times U_n+1$

3. Très rapidement les valeurs de U_n deviennent « voisines » de 5.

On conjecture $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n=5$.

4. L'algorithme permet de déterminer le nombre N d'heures nécessaires pour que la quantité de médicament soit inférieure ou égale à 5,1.

5. Le tableau donne :

$U_{17}=5{,}11290>5{,}1<U_{18}=5{,}090072$

Au bout de 18 heures la quantité de médicament est inférieure (pour la première fois) à 5,1.

Remarque

On peut écrire un programme Python pour définir la fonction nombre(K) qui pour $5<K<10$ associe le nombre N d'heures nécessaires pour que $U_N<K$.

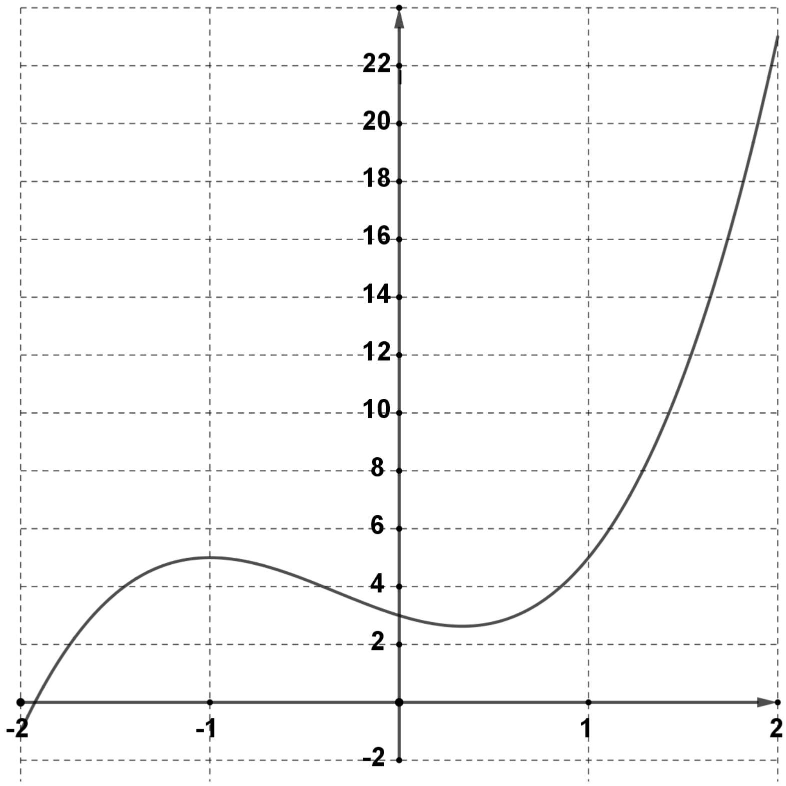
En dernière ligne on écrit print(nombre(5,1)) pour répondre à la question précédente.

```
def nombre(K):
  U=10
  N=0
  while U>K:
    U=0.8*U+1
    N=N+1
  return N
print(nombre(5.1))
```

Si on exécute le programme on obtient $N=18$.

EXERCICE 3 (5 points)

On considère la fonction f définie sur l'intervalle [-2;2] par $f(x)=2x^3+2x^2-2x+3$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le repère suivant :



1. On considère la droite d d'équation $y=2x+3$.

1.a. Montrer que déterminer les abscisses des points d'intersection de la droite d et de la courbe $\mathscr{C}$ revient à résoudre l'équation $2x(x^2+x-2)=0$ sur l'intervalle [-2;2].

1.b. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de d et $\mathscr{C}$.

2. On considère la droite d' d'équation $y=2x+\alpha$ où α est un nombre réel.
À l'aide du graphique, donner une valeur de α pour laquelle la droite d' et la courbe $\mathscr{C}$ ont un seul point d'intersection.

3. On note f' la fonction dérivée de f.

3.a. Démontrer que pour tout nombre réel x de l'intervalle [-2;2], $f'(x)=6(x+1)\left(x-\frac{1}{3}\right)$.

3.b. Étudier les variations de f sur [-2;2].

CORRECTION

1.a. Pour déterminer les coordonnées des points d'intersection de $\mathscr{C}$ et d, on doit résoudre le système suivant, en déterminant les abscisses appartenant à l'intervalle [-2;2].

$$\begin{cases} y=2x^3+2x^2-2x+3 \\ y=2x+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^3+2x^2-2x+3=2x+3 \\ y=2x+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^3+2x^2-4x=0 \\ y=2x+3 \end{cases}$$

$2x^3+2x^2-4x=0 \Leftrightarrow 2x(x^2+x-4)=0$

1.b. $2x(x^2+x-4)=0 \Leftrightarrow (2x=0 \text{ ou } x^2+x-4=0)$

$2x=0 \Leftrightarrow x=0 \quad 0\in[-2;2]$

$x^2+x-4=0 \quad \Delta=1^2-4\times1\times(-4)=9=3^2$

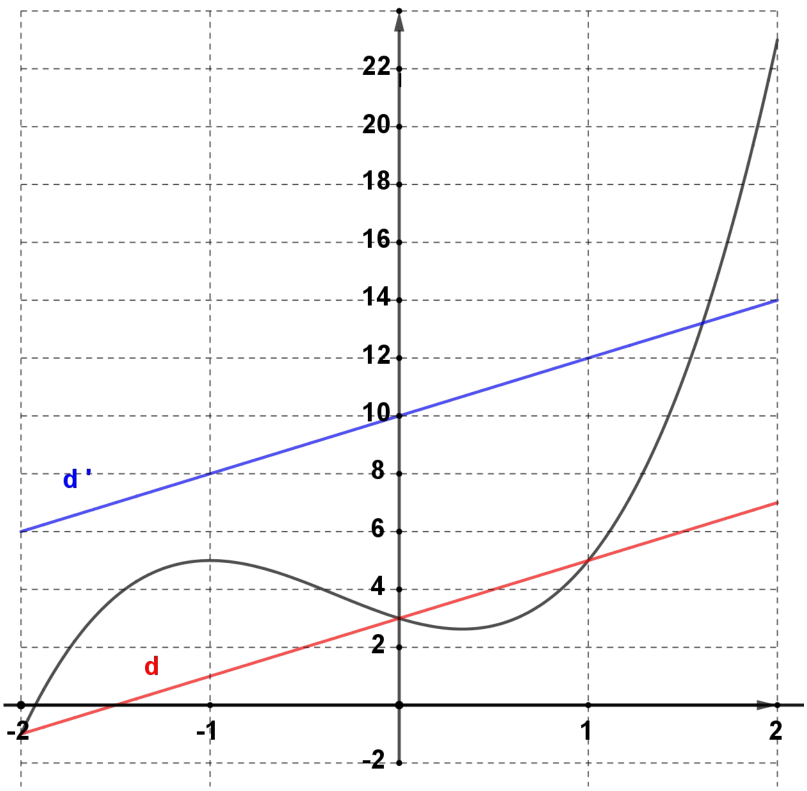
$x_1=\dfrac{-1-3}{2}=-2 \quad -2\in[-2;2]$

$x_2=\dfrac{-1+3}{2}=1 \quad 1\in[-2;2]$

$f(0)=3$; $f(-2)=-16+8+4+3=-1$ et $f(1)=2+2-2+3=5$

Les coordonnées des points d'intersection de $\mathscr{C}$ et d sont : (0;3) ; (-2 ;-1) et (1;5).

2. d' est une droite parallèle à d.



Il y a une infinité de valeurs possibles de α.
Par exemple on peut choisir $\alpha=10$ d': $y=2x+10$.
Attention :
On ne peut pas déterminer graphiquement les tangentes à $\mathscr{C}$ parallèles à d.

3.a. $f(x)=2x^3+2x^2-2x+3$

$f'(x)=6x^2+4x-2$

On écrit la forme canonique du trinôme :

$$f'(x)=6\left(x^2+\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}\right)=6\left[\left(x+\frac{1}{3}\right)^2-\frac{1}{9}-\frac{1}{3}\right]=6\left[\left(x+\frac{1}{3}\right)^2-\frac{4}{9}\right]=6\left[\left(x+\frac{1}{3}\right)^2-\left[\frac{2}{3}\right)^2\right]$$

$$f'(x)=6\left(x+\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right)\left(x+\frac{1}{3}-\frac{2}{3}\right)=6(x+1)\left(x+\frac{1}{3}\right)$$

3.b. On détermine le signe de $f'(x)$.

Les racines sont -1 et $\frac{1}{3}$ et le coefficient de x^2 est positif.

Le trinôme est positif sur [-2 ;-1[et $\left]\frac{1}{3}:2\right]$; le trinôme est négatif sur $\left]-1;\frac{1}{3}\right[$.

Tableau de variations de f.

x	-2		-1		$\frac{1}{3}$		2
f '(x)		+	0		0	+	
f(x)	-1	↗	5	↘	$\frac{71}{27}$	↗	23

$$f(2)=16+8-4+3=23$$

$$f\left(\frac{1}{3}\right)=2\times\frac{1}{27}+\frac{2}{9}-\frac{2}{3}+3=\frac{2+6-18+81}{27}=\frac{71}{27}\ .$$

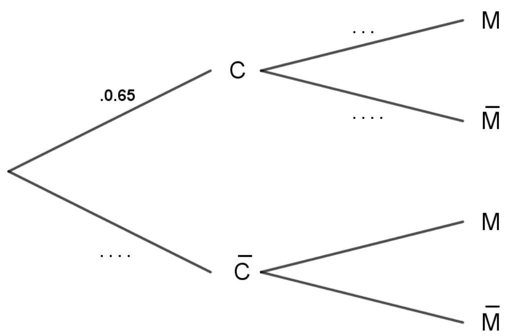
EXERCICE 4 (5 points)

Une résidence de vacances propose uniquement deux formules :
- la formule « pension complète » dans laquelle trois repas par jour sont fournis.
- la formule « demi-pension » dans laquelle sont fournis uniquement le petit déjeuner et le dîner.

Pour l'année 2018, 65 % des aliments ont choisi la formule « pension complète » ; les autres ont choisi la formule « demi-pension ».
Parmi les clients qui ont choisi la formule « demi-pension » 30 % ont réservé l'option « ménage » en fin de semaine. De plus 70 % des clients qui ont choisi la formule « pension complète » ont réservé l'option « ménage ».

On choisit un client au hasard parmi ceux de l'année 2018 et l'on considère les événements suivants :
C : le client a choisi la formule « pension complète ».
M : le client a choisi l'option « ménage ».

1. Recopier sur la copie et compléter l'arbre pondéré ci-dessous.



2. Calculer $P(C \cap M)$.

3. Montrer que la probabilité que le client ait réservé l'option « ménage » est égale à 0,56.

4. Calculer la probabilité que le client ait choisi la formule « pension complète » sachant qu'il a réservé l'option « ménage ».

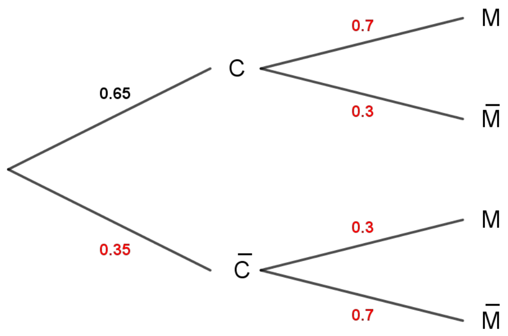
5. Voici la grille des tarifs de la résidence de vacances pour l'année 2018 :

Une semaine de pension complète	800€
Une semaine de demi-pension	650€
Option ménage	50€

On note X la variable aléatoire égale au montant payé par un client de 2018.
Calculer $P(X=850)$.

CORRECTION

1. L'énoncé précise :
65 % des clients ont choisi la formule « pension complète » donc :
$P(C)=0,65$ et $P(\bar{C})=1-P(C)=1-0,65=0,35$.
70 % des clients qui ont choisi la formule « pension complète » ont réservé l'option « ménage » donc :
$P_C(M)=0,7$ et $P_C(\bar{M})=1-P_C(M)=1-0,7=0,3$
Parmi les clients qui ont choisi la formule « demi-pension », 30 % ont réservé l'option « ménage » donc :
$P_{\bar{C}}(M)=0,3$ et $P_{\bar{C}}(\bar{M})=1-P_{\bar{C}}(M)=1-0,3=0,7$
On obtient l'arbre pondéré suivant :



2. $P(C\cap M)=P(C)\times P_C(M)=0,65\times 0,7=0,455$

3. En utilisant la formule des probabilités totales :
$P(M)=P(C\cap M)+P(\bar{C}\cap M)=0,455+P(\bar{C})\times P_{\bar{C}}(M)=0,455+0,35\times 0,3=0,455+0,105$
$P(M)=0,56$

4. On nous demande de calculer $P_M(C)$.
$$P_M(C)=\frac{P(C\cap M)}{P(M)}=\frac{0,455}{0,56}=\frac{455}{560}=\frac{91}{112}=\frac{13}{16}$$
$$P_M(C)=\frac{13}{16}=0,8125$$

5. L'univers image de X est: $\mathscr{X}=\{\ 650;700;800;850\ \}$
$P(X=850)=P(C\cap M)=0,455$.

