Sujet 2

EXERCICE 1 (5 points)

Cet exercice est un QCM et comprend cinq questions.
Pour chacune des questions, une seule des quatre réponses proposées est correcte.
Les questions sont indépendantes.
Pour chaque question, indiquer le numéro de la question et recopier la lettre correspondant à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée, mais il peut être nécessaire d'effectuer des recherches au brouillon pour aider à déterminer votre réponse.
Chaque réponse correcte rapporte un point. Une réponse incorrecte ou une question sans réponse n'apporte ni ne retire aucun point.

Question 1

L'inéquation $e^{-2x}>0$, d'inconnue x, a pour ensemble de solutions :

a) $\mathbb{R}$	b) $]0;+\infty[$	c) $]-\infty;0[$	d) $\varnothing$

Question 2

Pour tout réel x, $(e^{x}-1)^{2}$ est égal à :

a) $e^{2x}-1$	b) $e^{2x}+1$	c) $e^{2x}-2e^{x}+1$	d) $e^{x^2}-1$

Question 3

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=e^{5x-1}$. Pour tout nombre réel x, $f'(x)$ est égal à :

a) e^{5x-1}	b) $5e^{5x}$	c) $5e^{5x-1}$	d) $5xe^{5x-1}$

Question 4

Dans un repère orthonormé, la droite passant par A(4;7) et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$ est égal à :

a) 3x+y-19=0	b) 3x+y+19=0	c) -x+3y+17=0	d) -x+3y-17=0

Question 5

Le plan est muni d'un repère orthonormé.
On considère l'équation de cercle $x^{2}-4x+(x+3)^{2}=3$. Son centre a pour coordonnées :

a) (-2;-3)	b) (2:-3)	c) (-4:3)	d) (4:-3)

CORRECTION

Question 1 **Réponse : a**

Preuve non demandée

Pour tout nombre réel t on a $e^t > 0$ donc pour tout nombre réel x on a $e^{-2x} > 0$.

Question 2 **Réponse : c**

Preuve non demandée

$(e^x - 1)^2 = (e^x)^2 - 2 \times e^x + 1 + 1^2 = e^{2x} - 2e^x + 1$

Question 3 **Réponse : c**

Preuve non demandée

$(e^u)' = u' \times e^u$

$u(x) = 5x - 1$ $\quad$ $u'(x) = 5$ $\quad$ $f'(x) = (e^{5x-1})' = 5e^{5x-1}$

Question 4 **Réponse : d**

Preuve non demandée

(d) est la droite de vecteur non nul $\vec{n}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et passant par A(4;7).

$(d): \ -x + 3y + c = 0$ $\quad$ $-1 \times 4 + 3 \times 7 + c = 0 \Leftrightarrow c = 4 - 21 = -17$

$(d): \ -x + 3y - 17 = 0$

Question 5 **Réponse : b**

Preuve non demandée

$x^2 - 4x + (y+3)^2 = 3 \Leftrightarrow (x-2)^2 - 4 + (y+3)^2 = 3 \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y+3)^2 = 7$

Équation du cercle de centre $I(2;-3)$ et de rayon $\sqrt{7}$.

EXERCICE 2 (5 points)

Une chaîne de salons de coiffure propose à ses clients qui viennent pour une coupe deux prestations supplémentaires cumulables :
. une coloration naturelle à base de plantes appelée « couleur-soin » ;
. des mèches blondes pour donner du relief à la chevelure, appelées « effet coup de soleil ».

Il apparaît que 40 % des clients demandent une « couleur-soin », Parmi ceux qui ne veulent pas de « couleur-soin », 30 % des clients demandent un « effet coup de soleil ».
Par ailleurs, 24 % des clients demandent une couleur-soin » et un « effet coup de soleil ».

On interroge un client au hasard.

On notera C l'événement « le client souhaite « couleur-soin » ».
On notera E l'événement « le client souhaite un « effet coup de soleil » ».

1. Donner les valeurs de $P(C)$, $P(C \cap E)$ et $P_C(E)$.

2. Calculer la probabilité que le client ne souhaite ni une « couleur-soin » ni un « effet coup de soleil ».

3. Montrer que la probabilité de l'événement E est égale à 0,42.

4. Les événements C et E sont-ils indépendants ?

CORRECTION

1. 40 % des clients demandent une « couleur-soin » donc $P(C)=\dfrac{40}{100}=0,4$.

24 % des clients demandent une « couleur-soin » et un « un effet coup de soleil » donc

$P(C\cap E)=\dfrac{25}{100}=0,24$.

$P_C(E)=\dfrac{P(C\cap E)}{P(C)}=\dfrac{0,24}{0,40}=0,6$.

2. Parmi les clients qui ne veulent pas de « couleur-soin », 30 % demandent un « effet coup de soleil » donc $P_{\bar{C}}(E)=\dfrac{30}{100}=0,3$ et $P_{\bar{C}}(\bar{E})=1-P_{\bar{C}}(E)=1-0,3=0,7$.

D'autre part $P(\bar{C})=1-P(C)=1-0,4=0,6$

$P(\bar{C}\cap\bar{E})=P(\bar{C})\times P_{\bar{C}}(\bar{E})=0,6\times 0,7=0,42$

3. En utilisant la formule des probabilités totales :

$P(E)=P(C\cap E)+P(\bar{C}\cap E)$

$P(C\cap E)=0,24$ et $P(\bar{C}\cap E)=P(\bar{C})\times P_{\bar{C}}(E)=0,6\times 0,3=0,18$.

$P(E)=0,24+018=0,42$

4. $P(C\cap E)=0,24$

$P(C)=0,4$ et $P(E)=0,42$ donc $P(C)\times P(E)=0,4\times 0,42=0,168$

$P(C\cap E)\neq P(C)\times P(E)$ donc les événements C et E ne sont pas indépendants.

EXERCICE 3 (5 points)

Partie A

Soit (u_n) la suite géométrique de raison 2 et de premier terme $u_0=0{,}2$.

1. Calculer u_{18} puis u_{50} .

2. Calculer $u_0+u_1+\ldots+u_{18}$ c'est à dire la somme des 19 premiers termes de la suite (u_n) .

3. Recopier et compléter les trois parties en pointillé de l'algorithme suivant permettant de déterminer le plus petit entier naturel n tel que la somme des $n+1$ premiers termes de la suite (u_n) dépasse 100000.

```
U←0.2
S←0.2
N←0
Tant que . . . . . . .
   U← . . . . . .. . .
   S← . . . . . .  . . .
   N←N+1
Fin Tant que
Afficher N
```

Partie B

Claude a donné 20 centimes d'euros (soit 0,20€) à son petit enfant Camille pour sa naissance. Ensuite, Claude a doublé le montant offert d'une année sur l'autre pour chaque anniverssaire jusqu'au 18 ans de Camille.

La somme totale versée par Claude à Camille permet-elle de payer un appartement à Angers d'une valeur de 100 000€.

CORRECTION

1. $u_0=0{,}2 \quad q=2$

$u_{18}=u_0\times q^{18}=0{,}2\times 2^{18}=52428{,}8$

$u_{50}=u_0\times q^{50}=0{,}2\times 2^{50}\simeq 2{,}25\times 10^{14}$.

2. $S=u_0+u_1+\ldots+u_{18} \qquad qS=2\times S=u_1+u_2+\ldots u_{19}$

$2\times S-S=S=u_{19}-u_0=u_0\times(2^{19}-1)=0{,}2\times(2^{19}-1)=104857{,}4$.

3.

```
U←0.2
S←0.2
N←0
Tant que S<100000
   U←U*2
   S←S+U
   N←N+1
Fin Tant que
Afficher N
```

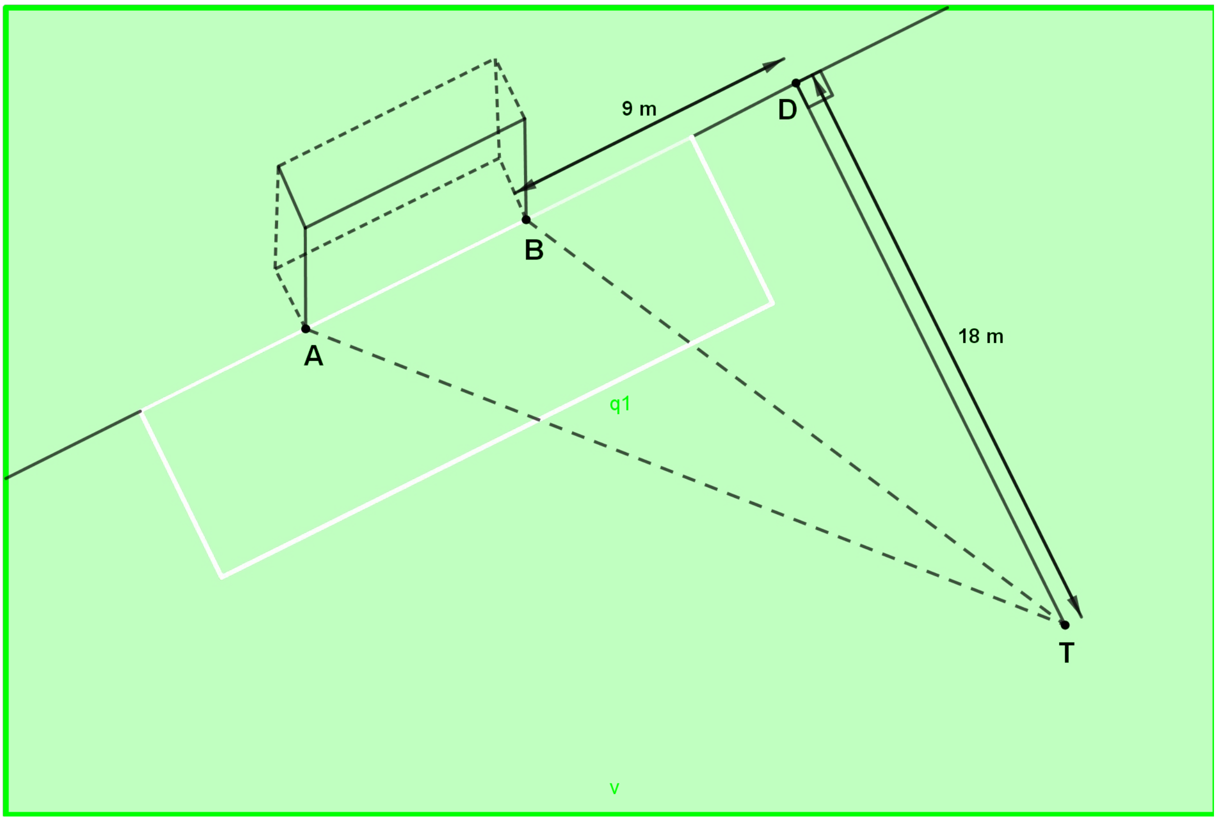
Si on programme l'algorithme en Python et qu'on l'exécute on obtient : N=18.

Partie B

Camille reçoit à la naissance 0,20 € au 1[er] anniversaire $0{,}20\times 2=0{,}40$ €, au 2[ème] anniversaire $0{,}40\times 2=0{,}80$ € . . . au 18[ème] anniversaire 52428,8 €.
Camille aura reçu pendant les années : $u_0+u_1+\ldots+u_{18}=S=104857{,}4$ € .
Cette somme est supérieure à 100000 € donc Camille peut payer un appartement à Angers de 100000 €.

EXERCICE 4 (5 points)

Sur le dessin ci-dessous, la largeur du but est $AB=7{,}32$ m.
Les poits A, B et D sont alignés.
On appelle T le point où se trouve un ballon.
Le triangle TAD est rectangle en D.



1. Pourquoi $\overrightarrow{TD}.\overrightarrow{DB}=0$.

2. Démontrer que $\overrightarrow{TA}.\overrightarrow{TB}=470{,}88$

3. Déterminer une valeur approchée, au dixième de degré près, de l'angle de tir, c'est à dire de l'angle $\widehat{ATB}$.

CORRECTION

1. Le triangle DTB est rectangle en D. Les vecteurs $\overrightarrow{TD}$ et $\overrightarrow{DB}$ sont orthogonaux donc $\overrightarrow{TD}.\overrightarrow{DB}=0$.

2. $\overrightarrow{TA}.\overrightarrow{TB}=(\overrightarrow{TD}+\overrightarrow{DA}).(\overrightarrow{TD}+\overrightarrow{DB})$
$\overrightarrow{TA}.\overrightarrow{TB}=\overrightarrow{TD}.\overrightarrow{TD}+\overrightarrow{TD}.\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{TD}+\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{DB}$
$\overrightarrow{TD}.\overrightarrow{TD}=TD^2=18^2=324$
$\overrightarrow{TD}.\overrightarrow{DB}=0$
$\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{TD}=0$ car les vecteurs $\overrightarrow{DA}$ et $\overrightarrow{TD}$ sont orthogonaux.
$\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{DB}=DA\times DB\times\cos(0)=DA\times DB$ car les vecteurs $\overrightarrow{DA}$ et $\overrightarrow{DB}$ sont colinéaires et de même sens.
$\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{DB}=9\times(9+7{,}32)=9\times16{,}32=146{,}88$
$\overrightarrow{TA}.\overrightarrow{TB}=324+146{,}88=470{,}88$.

3. Le triangle TDB est rectangle en D.
$TB^2=DB^2+DT^2=9^2+18^2=324+81=405=81\times5$ donc $TB=9\sqrt{5}$
Le triangle TDA est rectangle en D.
$TA^2=DA^2+TD^2=16{,}32^2+18^2=590{,}3424$ donc $TD=\sqrt{590{,}3424}$.
$\overrightarrow{TA}.\overrightarrow{TB}=TA\times TB\times\cos(\widehat{ATB})$ donc $\cos(\widehat{ATB})=\dfrac{\overrightarrow{TA}.\overrightarrow{TB}}{TA\times TB}$.
En utilisant la calculatrice.
$\cos(\widehat{ATB})=0{,}9630098846$ et $\widehat{ATB}=15{,}6^\circ$

