Sujet 20

EXERCICE 1 (5 points)

Cet exercice est un QCM et comprend cinq questions.
Pour chacune des questions, une seule des quatre réponses proposées est correcte.
Les questions sont indépendantes.
Pour chaque question, indiquer le numéro de la question et recopier la lettre correspondant à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée, mais il peut être nécessaire d'effectuer des recherches au brouillon pour aider à déterminer votre réponse.
Chaque réponse correcte rapporte un point. Une réponse incorrecte ou une question sans réponse n'apporte ni ne retire aucun point.

Question 1

Soit ABC un triangle tel que $AB=6$, $AC=3$ et $\widehat{BAC}=\frac{\pi}{3}$.

Alors :
a. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=9$
b. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=18$
c. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=9\sqrt{3}$
d. les données sont insuffisantes pour calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

Question 2

Soit f une fonction telle que, pour tout nombre réel h non nul, $\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=h^2+3h-1$.

Alors $f'(1)$ est égal à :
a. h^2+3h-1
b. -1
c. 3
d. les données sont insuffisantes pour déterminer $f'(1)$.

Question 3

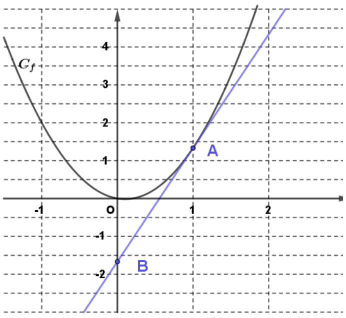
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(x+2)e^x$.
Alors, la fonction f' dérivée de f est donnée sur $\mathbb{R}$ par :
a. $f'(x)=e^x$
b. $f'(x)=(x+3)e^x$
c. $f'(x)=(-x-1)e^x$
d. $f'(x)=\frac{(-x-1)e^x}{e^{2x}}$

Question 4

Soit f une fonction telle que $f(2)=5$ et $f'(2)=-1$.
Dans un repère, la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 2 a pour équation :
a. $y=-x-1$
b. $y=-x+3$
c. $y=-x+7$
d. $y=5x-11$

Question 5

Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ dont la courbe représentative C_f dans un repère est la courbe ci-dessous.



La tangente à C_f au point $A\left(1;\frac{4}{3}\right)$ passe par le point $B\left(0;-\frac{5}{3}\right)$.

Alors :

a. $f'(1)=\frac{1}{3}$

b. $f'(1)=\frac{4}{3}$

c. $f'(1)=-\frac{5}{3}$

d. $f'(1)=3$

CORRECTION

Question 1   Réponse : a

Preuve non demandée

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB\times AC\times\cos(\widehat{BAC})=6\times 3\times\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=18\times\frac{1}{2}=9$$

Question 2   Réponse : b

Preuve non demandée

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(1+h)-f(1)}{h}\right)=\lim_{h\to 0}(h^2+3h-1)=-1=f'(1)$$

Question 3   Réponse : b

Preuve non demandée

$(u\times v)'=u'\times v+u\times v'$ $f(x)=(x+2)e^x$

$u(x)=x+2$ $u'(x)=1$

$v(x)=e^x$ $v'(x)=e^x$

$f'(x)=1\times e^x+(x+2)+e^x=(1+x+2)e^x=(x+3)e^x$

Question 4   Réponse : c

Preuve non demandée

La tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 2 apour coefficient directeur $f'(2)=-1$ et passe par le point de coordonnées $(2;5)$, son équation réduite est donc $y=-x+7$.

Question 5   Réponse : d

Preuve non demandée

La tangente à la courbe C_f au point $A\left(1;\frac{4}{3}\right)$ a pour coefficient directeur : $f'(1)$.

Cette tangente est la droite (AB).

Le coefficient directeur de (AB) est :

$$\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{-\frac{5}{3}-\frac{4}{3}}{0-1}=\frac{-\frac{9}{3}}{-1}=3\ .$$

$f'(1)=3$.

EXERCICE 2 (5 points)

Une entreprise fabrique q milliers d'objets, $q \in [1;20]$.
Le coût total de fabrication, exprimé en euros, en fonction de q, est donné par l'expression :
$C(q)=q^3-18q^2+750q+200$.

1.a. Calculer le coût total de fabrication de 5000 objets.

1.b. Déterminer le coût moyen d'un millier d'objets lorsqu'on fabrique 5000 objets.

2. Le coût moyen $C_M(q)$ de fabrication de q milliers d'objets, exprimé en euros, est donné par l'expression :

$$C_M(q)=\frac{C_M(q)}{q}=q^2-18q+750+\frac{200}{q} .$$

2.a. On note C'_M la fonction dérivée , sur l'intervalle [1;20], de la fonction C_M .
Montrer que pour tout $q \in [1;20]$

$$C'_M(q)=\frac{2(q-10)(q^2+q+10)}{q^2} .$$

2.b. Étudier le signe de C'_M et dresser le tableau de variation de la fonction C_M sur l'intervalle [1;20].

2.c. Quel est le coût moyen minimal et pour quelle quantité d'objets est-il obtenu ?

CORRECTION

1.a. Le coût total de fabrication de 5000 objets est égal à $C(5)$.
$C(5)=5^3-18\times5^2+750\times5+200=125-450+3750+200=3625$ € .

1.b. Le coût moyen d'un millier d'objets lorsqu'on fabrique 5000 objets est : $\dfrac{C(5)}{5}=\dfrac{3625}{5}=725$ € .

2.a. $q\in[1;20]$

$$C_M(q)=\frac{C(q)}{q}=q^2-18q+750+\frac{200}{q}$$

$$C_M'(q)=2q-18-\frac{200}{q}=\frac{2q^3-18q^2-200}{q^2}$$

Or $2(q-10)(q^2+q+10)=2(q^3+q^2+10q-10q^2-10q-100)=2(q^3-9q^2-100)=2q^3-18q^2-200$.

Donc $C_M'(q)=\dfrac{2(q-10)(q^2+q+10)}{q^2}$.

2.b. $T(q)=q^2+q+10$ $\quad\Delta=1-4\times1\times10=-39<0$

Le coefficient de q^2 est positif donc pour tout $q\in[1;20]$ $T(q)>0$ de même $q^2>0$ et le signe de $C_M'(q)$ sur [1;20] est le signe de $q-10$.

$q-10=0 \Leftrightarrow q=10$

$q-10>0 \Leftrightarrow q>10$

$q-10<0 \Leftrightarrow q<10$

C_M est décroissante sur [1:10[et croissante sur]10:20].

Tableau de variation de C_M

q	1		10		20
C'_M		−	0	+	
C_M	933	↘	690	↗	800

$$C_M(1)=\frac{1-18+750+200}{1}=933$$

$$C_M(20)=\frac{8000-18\times400+750\times20+200}{20}=\frac{8000-7200+15000+200}{20}=\frac{16000}{20}=800$$

$$C_M(10)=\frac{1000-1800+7500+200}{10}=\frac{6900}{10}=690$$

2.c. C_M admet un minimum égal à 690 pour la fabrication de 10000 objets.

EXERCICE 3 (5 points)

La famille A décide de diminuer de 2 % par mois sa quantité de déchets produite par mois à partir du 1er janvier 2020.
Au mois de décembre 2019, elle a produit 120 kg de déchets.

1. Justifier qu'au bout de 2 mois, la famille A aura produit environ 115 kg de déchets.

On admet que la quantité de déchets produit chaque mois conserve la même évolution toute l'année.
On modélise l'évolution de la production de déchets de la famille A par la suite de terme général a_n où a_n , représente la quantité en kg, de déchets produite par la famille A, n mois après décembre 2019.
Ainsi, a_0 représente la quantité de déchets produite pendant le mois de décembre 2019, a_1 représente la quantité de déchets produite dans le mois de janvier 2020 etc.

2.a. Déterminer la nature de la suite (a_n).

2.b. Pour tout entier naturel n, exprimer a_n en fonction de n.

2.c. Déterminer la quantité totale de déchets que produira la famille A durant l'année 2020.
On arrondira le résultat à l'unité.
On rappelle que :
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q, $q\neq 1$. La somme S de termes consécutifs est égale à : $S=u_1+u_2+\ldots+u_n=u_1\times\dfrac{1-q^n}{1-q}$.

2.d. On donne le programme ci-dessous :

```
def S(n):
  U=120
  S=0
  for k in range(n):
    U=0.98*U
    S=S+U
  return(S)

```

On représente le résultat renvoyé par la fonction si on entre l'instruction S(6) ?

CORRECTION

1. Au mois de janvier 2020 la famille A aura produit 2 % de moins de déchets qu'au mois de décembre 2019.
La quantité (en kg) de déchets produite durant le mois de janvier 2020 sera :
$120-\frac{2}{100}\times120=120-0{,}02\times120=120-2{,}4=117{,}6$.
Au mois de février 2020 la famille A aura produit 2 % de moins de déchets qu'au mois de janvier 2020.
La quantité (en kg) de déchets produite durant le mois de février 2020 sera :
$117{,}6-\frac{2}{100}\times117{,}6=117{,}6-0{,}02\times117{,}6=117{,}6-2{,}352=115{,}248$.
Au mois de février 2020 la famille A aura produit environ 115 kg de déchets.

2.a. Pour tout entier naturel n.
$a_{n+1}=a_n-\frac{2}{100}\times a_n=a_n-0{,}02\times a_n=(1-0{,}02)a_n=0{,}98\,a_n$
(a_n) est la suite géométrique de premier terme $a_0=120$ et de raison $q=0{,}98$.

2.b. Pour tout entier naturel n.
$a_n=a_0\times q^n=120\times0{,}98^n$

2.c. La quantité totale de déchets que produira la famille A durant l'année 2020 sera :
$S=a_1+a_2+\ldots+a_{12}$
$S=a_1\times\frac{1-q^n}{1-q}=117{,}6\times\frac{1-0{,}98^{12}}{0{,}02}$.
En utilisant la calculatrice et en arrondissant à l'unité, on obtient : 1266 kg.

2.d. Le résultat renvoyé pour S(6) est la somme $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6$ c'est à dire la quantité totale que la famille A aura produit pendant les 6 premiers mois de l'année 2020.
Si on exécute le programme en ajoutant la ligne 8 : print(S(6)), on obtient 671 kg arrondi à l'unité.

EXERCICE 4 (5 points)

Pierre joue à un jeu dont une partie est constituée d'un lancer de fléchette sur une cible suivi d'un tirage au sort dans deux urnes contenant des tickets marqués « gagnant » ou « perdant » indiscernables.

. S'il tire un ticket « gagnant », il pourra recommencer une partie.

. S'il atteint le centre de la fibre, Pierre tire un ticket dans l'urne U_1 contenant exactement neuf tickets marqués « gagnant » et un ticket marqué « perdant ».

. S'il n'atteint pas le centre de la cible (donc même s'il n'atteint pas la cible), Pierre tire un ticket dans l'urne U_2 contenant exactement quatre tickets marqués « gagant » et six tickets marqués « perdant ».

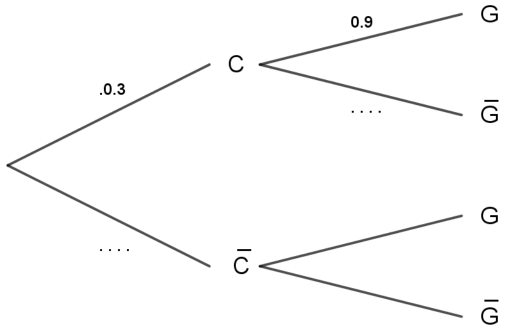
Pierre atteint le centre de la cible avec une probabilité de 0,3.

On note les événements suivants :

. C : « Pierre atteint le centre de la cible » ;

. G : « Pierre tire un ticket lui offrant une autre partie ».

1. Recopier l'arbre pondéré ci-dessous et justifier la valeur 0,9.



2. Compléter sur la copie l'arbre pondéré en traduisant la donnée de l'exercice.

3. Calculer la probabilité de l'événement $\overline{C} \cap G$.

4. Montrer que la probabilité qu'à l'issue d'une partie, Pierre en gagne une nouvelle partie est égale à 0,55.

5. Sachant que Pierre a gagné une nouvelle partie, quelle est la probabilité qu'il est atteint le centre de la cible ? Arrondir le résultat à 10^{-3}.

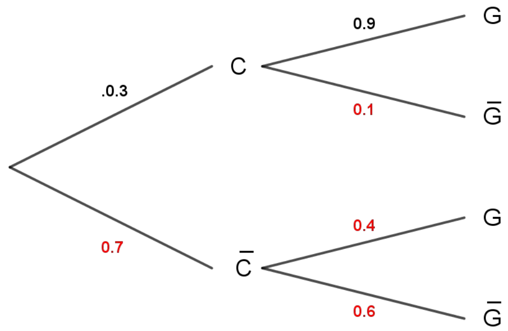
CORRECTION

1. L'urne U_1 contient neuf tickets marqués « gagnant » et un ticket marqués « perdant » indiscernables.

Si on tire au hasard un ticket de l'urne U_1 on a la probabilité de $\frac{9}{10}=0,9$ d'obtenir un ticket « gagnant » la probabilité de $\frac{1}{10}=0,1$ d'obtenir un ticket « perdant ».

Lorsque Pierre effectue une partie du jeu et s'il atteint le centre de la cible avec la fléchette (événement C) alors il tire un ticket de l'urne U_1 avec une probabilité d'obtenir un ticket marqué « gagnant » de 0,9 c'est à dire que : $P_C(G)=0,9$.

On obtient pour arbre pondéré :



2. De même $P_C(\bar{G})=0,1$.

$P(\bar{C})=1-P(C)1-0,3=0,7$

Dans l'urne U_2 il y a quatre tickets marqués « gagnant » et six tickets marqués « perdant » donc :

$P_{\bar{C}}(G)=0,4$ et $P_{\bar{C}}(\bar{G})=0,6$

3. $P(\bar{C}\cap G)=P(\bar{C})\times P_{\bar{C}}(G)=0,7\times 0,4=0,28$

4. En utilisant l'arbre pondéré ou la formule des probabilités totales.

$P(G)=P(C\cap G)+P(\bar{C}\cap G)=P(C)\times P_C(G)+0,28=0,3\times 0,9+0,28=0,27+0,28$

$P(G)=0,55$

5. On nous demande de calculer $P_G(C)$.

$P_G(C)=\frac{P(C\cap G)}{P(G)}=\frac{0,27}{0,55}=\frac{27}{55}=0,491$ à 10^{-3} près.