Sujet 21

EXERCICE 1 (5 points)

Cet exercice est un QCM et comprend cinq questions.
Pour chacune des questions, une seule des quatre réponses proposées est correcte.
Les questions sont indépendantes.
Pour chaque question, indiquer le numéro de la question et recopier la lettre correspondant à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée, mais il peut être nécessaire d'effectuer des recherches au brouillon pour aider à déterminer votre réponse.
Chaque réponse correcte rapporte un point. Une réponse incorrecte ou une question sans réponse n'apporte ni ne retire aucun point.

Question 1

(u_n) est la suite arithmétique telle que $u_4=3$ et $u_{10}=18$. On peut affirmer que :

a) $u_0=7$	b) $u_7=20.5$	c) $u_{12}=23$	d) $u_{14}=28$

Question 2

$2+3+4+\ldots+999+1000$ est égal à :

a) 500500	b) 498999	c) 499000	d) 500499

Question 3

(v_n) est la suite géométrique de raison 0,3 telle que $v_0=-3$. On conjecture que la suite (v_n) a pour limite :

a) 0	b) $+\infty$	c) $-\infty$	d) -3

Question 4

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=-2(x+2)^2-3$. On peut affirmer qu'elle est :

a) décroissante sur $]-\infty:+\infty[$	b) décroissante sur $]-2;+\infty[$	c) croissante sur $]-\infty;2[$	d) décroissante sur $]-3;+\infty[$

Question 5

L'ensemble des solutions de l'inéquation $x^2-5x+6<0$ est :

a) $]-\infty;2[\cup]3;\infty[$	b) $]-\infty;-1[\cup]6;+\infty[$	c) $]2;3[$	d) $]-1;6[$

CORRECTION

Question 1 Réponse : c

Preuve non demandée

(u_n) est une suite arithmétique de raison r.

$u_{10} - u_4 = 6r$ donc $18 - 3 = 6r \Leftrightarrow r = \frac{15}{6} = 2{,}5$.

$u_0 = u_4 - 4r = 3 - 10 = -7$ l'affirmation a est fausse.
$u_7 = u_4 + 3r = 3 + 7{,}5 = 10{,}5$ l'affirmation b est fausse.
$u_{12} = u_4 + 8r = 3 + 20 = 23$ l'affirmation c est vraie.
$u_{14} = u_4 + 10r = 3 + 25 = 28$ l'affirmation d est fausse.

Question 2 Réponse : d

Preuve non demandée

$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ $\qquad 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2} - 1$

$2 + 3 + 4 + \ldots + 999 + 1000 = \frac{1000 \times 1001}{2} - 1 = 500500 - 1 = 500499$

Question 3 Réponse: a

Preuve non demandée

Pour tout entier naturel n, $v_n = v_0 \times q^n = -3 \times 0{,}3^n$.

$-1 < 0{,}3 < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}3^n = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$.

Question 4 Réponse : b

Preuve non demandée

$f(x) = -2(x+2)^2 - 3$ donc f admet un maximum égal à -3 pour $x = -2$ et f est croissante sur $]-\infty ; -2[$ et décroissante sur $]-2 ; +\infty[$.

Question 5 Réponse : c

Preuve non demabdée

$T(x) = x^2 - 5x + 6$ $\qquad \Delta = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 6 = 25 - 24 = 1$

$x_1 = \frac{5-1}{2} = \frac{4}{2} = 2$ $\qquad x_2 = \frac{5+1}{2} = \frac{6}{2} = 3$

Le coefficient de x^2 est positif donc l'ensemble des solutions de l'inéquation $T(x) < 0$ est $]2 ; 3[$.

EXERCICE 2 (5 points)

Une entreprise fabrique des pièces en acier, toutes identiques, pour l'industrie aéronautique.
Ces pièces sont coulées dans des moules à la sortie du four.
Elles sont stockées dans un entrepôt dont la température ambiante est maintenue à 25°C.
Ces pièces peuvent être modelées dès que leur température devient inférieure ou égale à 600°C et on peut travailler tant que leur température reste supérieure ou égale à 500°C.
On admet que la température en degré Celsius de ces pièces peut être modélisée par la fonction f définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par : $f(t)=1375\,e^{-0{,}075\,t}+25$ où t correspond au temps, exprimé en heure mesuré à la sortie du four.

1. Calculer la température à la sortie du four.

2. Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0;+\infty[$. Ce résultat était-i l prévisible dans le contexte de l'exercice ?

3. Les pièces peuvent-elles être modelées 10 heures après la sortie du four ? Après 14 heures ?

4. On souhaite déterminer le temps minimum d'attente en heures après la sortie du four avant de pouvoir modeler les pièces.

4.a. Compléter l'algorithme donné en **annexe à rendre avec la copie**, pour qu'il renvoie ce temps d'attente en heure (arrondi par excès à 0,1 près).

4.b. Déterminer ce temps minimum d'attente. On arrondira au dixième.

ANNEXE
à rendre avec la copie

```
from math import exp
def f(t):
  return 1375*exp(0.075*t)+25
def seuil():
  t= . . .
  temperature=. .  . .
  while temperature>= . . . :
    t=t+0.1
    temperature=. . .
  return t
```


CORRECTION

1. $f(0)$ est la température à la sortie du four.
$f(0)=1375e^0+25=1400^0C$.

2. $(e^{u(t)})'=u'(t)e^{u(t)}$ donc $(e^{-0,075t})'=-0,075e^{-0,075t}$ et $f'(t)=-0,075\times 1375e^{-0,075t}$.
Pour tout t de l'intervalle $[0;+\infty[$, $e^{-0,075t}>0$ et $f'(t)<0$
donc f est strictement décroissante sur $[0;+\infty[$.
Lorsqu'une pièce est stockées dans l'entrepôt la température diminue pour s'approcher de la température ambiante de l'entrepôt .
On remarque que pour tout t de l'intervalle $[0;+\infty[$ $f(t)>25$ et on sait que la température de l'entrepôt est maintenue à 25°C.
Conséquence : la température des pièces en acier diminue toujours.

3. $f(10)=674,5>600^0C$.
Les pièces ne peuvent pas encore êttre modelées au bout de 10 heures.
$f(14)=506,2$ $500^0C<f(14)<600^0C$
Les pièces peuvent encore être modelées au bout de 14 heures.

4.a.

```
from math import exp
def f(t):
  return 1375*exp(0.075*t)+25
def seuil():
  t= 10
  temperature= f(t)
  while temperature>=600 :
    t=t+0.1
    temperature= f(t)
  return t
```

Nous avons vu que $f(10)>600^0C$ donc pour l'algorithme on peut commencer par t=10.

4.b. Si on exécute l'algorithme en ajoutant une dernière ligne : print(seuil()) alors on obtient 11,7.
Si on vérifie en utilisant la calculatrice, on obtient : $f(11,7)=596,8$ et $f(11,6)=601,1$.

. On peut retrouver le résultats par balayage.
$f(14)<600<f(10)$
$f(12)<600<f(10)$
$f(12)<600<f(11)$
$f(12)<600\,f(11,5)$
$f(11,7)<600<f(11,6)$
On obtient 11,7.

EXERCICE 3 (5 points)

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$, on considère les points A(4 ;-1) ; B(3;4) et C(-1;1).

1. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

2.a. Soit D le projeté orthogonal du point C sur la droite (AB), justifier que : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

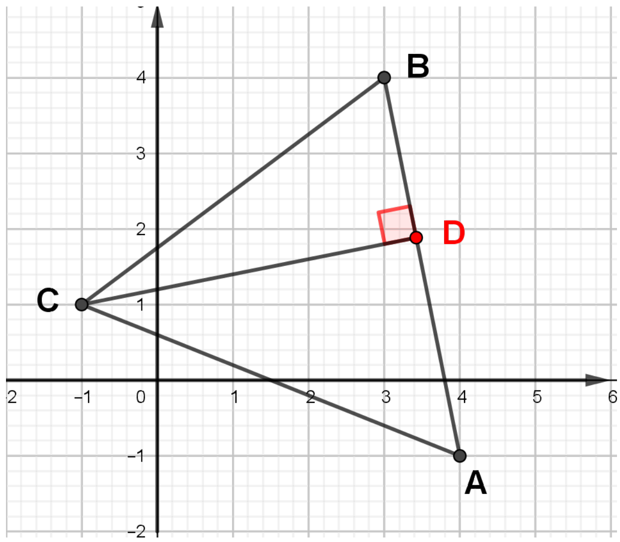
2.b. En déduire la longueur AD.

3. Déterminer la hauteur du triangle ABC issue de C.

4. Calculer l'aire du triangle ABC.

CORRECTION

On propose de faire une figure.



1. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\5\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-5\\2\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=(-1)\times(-5)+5\times2=5+10=15$

2.a. $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC})=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DC}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont orthogonaux donc $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DC}=0$.

Conséquence : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$

2.b. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont colinéaires est de même sens (le produit scalaire de ces vecteurs est positif) donc $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=AB\times AD=15$.

Or $AB^2=(-1)^2+5^2=26$ et $AB=\sqrt{26}$ et $AD=\dfrac{15}{\sqrt{26}}$.

3. Le triangle ACD est rectangle en D.

On utilise le théorème de Pythagore :

$CA^2=AD^2+DC^2$

$CA^2=AC^2=(-5)^2+2^2=29$

On obtient :

$$DC^2=AC^2-AD^2=29-\frac{15^2}{26}=\frac{29\times26-15^2}{26}=\frac{529}{26}=\frac{23^2}{26}$$

donc $DC=\dfrac{23}{\sqrt{26}}$.

4. L'aire du triangle (en unité d'aire) du triangle ABC est $\mathscr{A}=\dfrac{1}{2}\times AB\times CD$.

$$\mathscr{A}=\frac{1}{2}\times\sqrt{26}\times\frac{23}{\sqrt{26}}=\frac{23}{2}=11{,}5\ .$$

EXERCICE 4 (5 points)

Une entreprise de 1000 employés est organisée en 3 services « A », « B » et « C » d'effectifs respectifs 450, 230 et 320 employés. Une enquête effectuée auprès de tous les employés sur le temps de parcours quotidien entre leur domicile et l'entreprise a montré que :
- 40 % des employés du service « A » résident à moins de 30 minutes de l'entreprise ;
- 20 % des employés du service « B » résident à moins de 30 minutes de l'entreprise ;
- 80 % des employés du service « C » résident à moins de 30 minutes de l'entreprise.

On choisit au hasard un employé de cette entreprise et on considère les événements suivants :
- A : l'employé fait partie du service « A » ;
- B : l'employé fait partie du service « B » ;
- C : l'employé fait partie du service « C » ;
- T : l'employé réside à moins de 30 minutes de l'entreprise.

On rappelle que si E et F sont deux événements, la probabilité de E est notée P(E) et celle de E sachant F (de probabilité non nulle) $P_F(E)$.

1. Justifier que $P(A)=0,45$ puis donner $P_A(T)$.

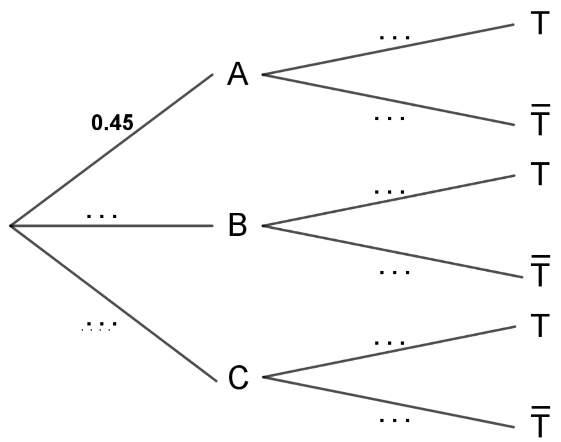
2. Compléter l'arbre pondéré donné en **annexe** qui sera à rendre avec la copie.

3. Déterminer la probabilité que l'employé choisi soit du service « A » et qu'il réside à moins de 30 minutes de son lieu de travail.

4. Montrer que $P(T)=0,482$.

5. Sachant qu'un employé de l'entreprise réside à moins de 30 minutes de son lieu de travail, déterminer la probabilité qu'il fasse partie du service « C ». Arrondir à 10^{-3} près.

ANNEXE
à rendre avec la copie



CORRECTION

1. Parmi les 1000 employés, 450 sont dans le service « A » donc $P(A)=\dfrac{450}{1000}=0{,}45$.

40 % des employés du service « A » résident à moins de 30 minutes de l'entreprise donc $P_A(T)=0{,}4$.

2. $P_A(\bar{T})=1-P_A(T)=1-0{,}4=0{,}6$.

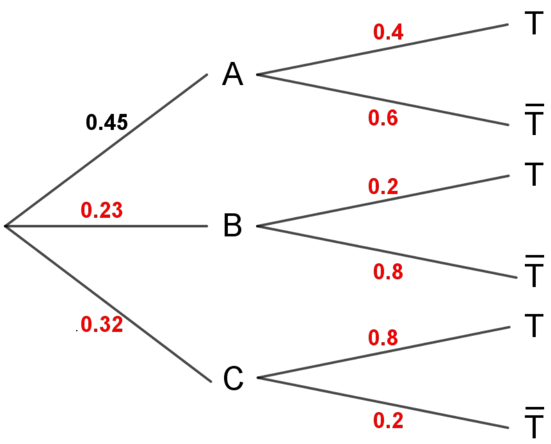
. 230 employés sont dans le service « B » donc $P(B)=\dfrac{230}{1000}=0{,}23$.

20 % de ces employés résident à moins de 30 minutes de l'entreprise donc $P_B(T)=0{,}2$.
$P_B(\bar{T})=1-P_B(T)=1-0{,}2=0{,}8$.

. 320 employés sont dans le service « C » donc $P(C)=\dfrac{320}{1000}=0{,}32$.

80 % de ces employés résident à moins de 30 minutes de l'entreprise donc $P_C(T)=0{,}8$.
$P_C(\bar{T})=1-P_C(T)=1-0{,}8=0{,}2$.

. On obtient l'arbre pondéré :



3. On nous demande de calculer $P(A\cap T)$.
$P(A\cap T)=P(A)\times P_A(T)=0{,}45\times 0{,}4=0{,}18$.

4. En utilisant l'arbre pondéré ou la formule des probabilités totales.
$P(T)=P(A\cap T)+P(B\cap T)+P(C\cap T)=0{,}18+P(B)\times P_B(T)+P(C)\times P_C(T)$
$P(T)=0{,}18+0{,}23\times 0{,}2+0{,}32\times 0{,}8=0{,}18+0{,}046+0{,}256=0{,}482$.

5. On nous demande de calculer $P_T(C)$.

$P_T(C)=\dfrac{P(C\cap T)}{P(T)}=\dfrac{0{,}256}{482}=\dfrac{256}{482}=0{,}531$ à 10^{-3} près.