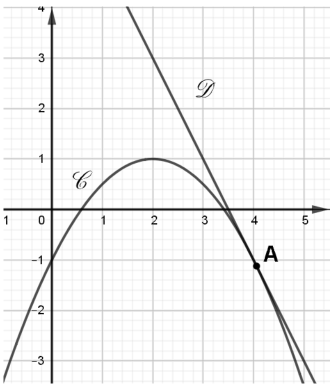
Sujet 22

EXERCICE 1 (5 points)

Cet exercice est un QCM et comprend cinq questions.
Pour chacune des questions, une seule des quatre réponses proposées est correcte.
Les questions sont indépendantes.
Pour chaque question, indiquer le numéro de la question et recopier la lettre correspondant à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée, mais il peut être nécessaire d'effectuer des recherches au brouillon pour aider à déterminer votre réponse.
Chaque réponse correcte rapporte un point. Une réponse incorrecte ou une question sans réponse n'apporte ni ne retire aucun point.

Question 1

Sur la figure ci-dessous, nous avons tracé la courbe $\mathscr{C}$ d'une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 4.
Cette tangente est représentée par la droite $\mathscr{D}$. On note f' la fonction dérivée de la fonction f.



Le réel $f'(4)$ est égal à :

a) -1	b) -2	c) 7	d) 1

Question 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3-2x^2+1$. On admet que f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.
Dans un repère , une équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse 1 est :

a) y=-1	b) y=-x	c) y=-x+1	d) y=x

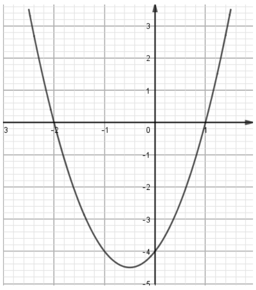
Question 3

Pour tout réel x, $\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^{-x}}$ est égal à :

a) e^{-x}	b) e^{3x}	c) e^{-3x}	d) e^x

Question 4

Soit f une fonction polynôme du second degré dont la courbe représentative dans un repère est donné ci-dessous.



Pour tout réel x, une expression de $f(x)$ est :

a) $f(x)=x^2+x-2$	b) $f(x)=-x^2-4$	c) $f(x)=2x^2+2x-4$	d) $f(x)=-3x^2-3x+6$

Question 5

L'ensemble S des solutions de l'inéquation d'inconnue x appartenant à $\mathbb{R}$ est :

a) S=[-4;2]	b) S=]-4;2[	c) S=]-∞;-4[∪]2;+∞[	d) S={-4;2}

CORRECTION

Question 1 Réponse : b

Preuve non demandée

$f'(4)$ est le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse 4.
Cette tangente $\mathscr{D}$ passe par les points A(4 ;-1) et B(2;3).

$f'(4)=\frac{3+1}{2-4}=-2$

Question 2 Réponse : b

Preuve non demandée

$f(x)=x^3-2x^2+1 \qquad f(1)=1-2+1=0$

$f'(x)=3x^2-4x \qquad f'(1)=3-4=-1$

La tangente à la courbe au point d'abscisse 1 est la droite ayant pour ordonnée à l'origine 0 et pour coefficient directeur $f'(1)=-1$ donc l'équation réduite de cette tangente est : $y=-x$.

Question 3 Réponse : a

Preuve non demandée

$\frac{e^x\times e^{-3x}}{e^{-x}}=\frac{e^{x-3x}}{e^{-x}}=\frac{e^{-2x}}{e^{-x}}=e^{-2x-(-x)}=e^{-x}$

Question 4 Réponse : c

Preuve non demandée

La fonction f admet un minimum donc le coefficient de x^2 est positif.
La courbe passe par le point A(0;-4) et $f(0)=-4$.
Donc $f(x)=2x^2-2x-4$

Question 5 Réponse : b

Preuve non demandée

$T(x)=-x^2-2x+8 \qquad \Delta=(-2)^2-4\times(-1)\times8=36=6^2$

$x_1=\frac{2-6}{-2}=\frac{-4}{-2}=2 \qquad x_2=\frac{2+6}{-2}=\frac{8}{-2}=-4$.

Le coefficient de x^2 est négatif donc $S=]-4;2[$

EXERCICE 2 (5 points)

La quantité (en kg) de déchets ménagers produite par habitant d'une ville de taille moyenne a été de 537 kg en 2019 et la municipalité espère réduire cette production de 1,5 % par an.
Pour tout entier naturel n, on note d_n la quantité (en kg) de déchets ménagers produit par habitant de cette ville durant l'année $2019+n$, on a donc $d_0=537$.

1. Montrer par un calcul que $d_1=0{,}985\times d_0$.

2. Pour tout entier naturel n, exprimer d_{n+1} en fonction de d_n .

3. En déduire la nature de la suite (d_n) puis une expression de d_n en fonction de n.

4. On souhaite savoir à partir de quelle année la production moyenne de déchets produite par chaque habitant sera inférieure à celle enregistrée en 2019 au niveau national à savoir 513 kg.
Pour cela, on considère l'algorithme suivant rédigé en langage Python.

```
def annee():
  n=0
  d=537
  while d> .....:
    n=n+1
    d= ........
  return n
```

4.a. Recopier et compléter l'algorithme afin de répondre au problème posé.

4.b. À partir de quelle année la production moyenne de déchets produite par chaque habitant sera-t-elle inférieure à celle enregistrée en 2019 au niveau national ?

CORRECTION

1. En 2020=2019+1, la quantité (en kg) de déchets ménagers produit par habitant est réduite de 1,5 % donc :
$d_1=d_0-\frac{1,5}{100}\times d_0=d_0-0,015\,d_0=(1-0,015)d_0=0,985\,d_0$.

2. En 2019+n+1, la quantité (en kg) de déchets ménagers produite par habitant est réduite de 1,5 % par rapport à la production de l'année 2019+n, donc :
$d_{n+1}=d_n-\frac{1,5}{100}\times d_n=d_n-0,015\,d_n=(1-0,015)d_n=0,985\,d_n$.

3. $d_0=537$ et pour tout entier naturel n, $d_{n+1}=0,985\,d_n$.
La suite (d_n) est la suite géométrique de premier terme $d_0=537$ et de raison $q=0,985$.
Pour tout entier naturel n, $d_n=d_0\times q^n=537\times 0,985^n$.

4.a. On complète l'algorithme donné.

```
1  def annee():
2      n=0
3      d=537
4      while d>519 :
5          n=n+1
6          d= 0.985*d
7      return n
```

4.b. Si on exécute le le programme (en ajoutant la ligne :8 print(annee()) on obtient : 3.
C'est à dire qu'en $2019+3=2022$ la quantité (en kg) de déchets ménagers produite par habitant est inférieure (pour la première année) à 519 qui est la quantité (en kg) enregistrée en 2019 au niveau national.

EXERCICE 3 (5 points)

Dans un repère orthonormé, on considère le point A(-3;5) et la droite (d) dont une équation cartésienne est : $-x+3y+2=0$.

1. Tracer la droite (d) dans le repère donné en annexe à rendre avec la copie.

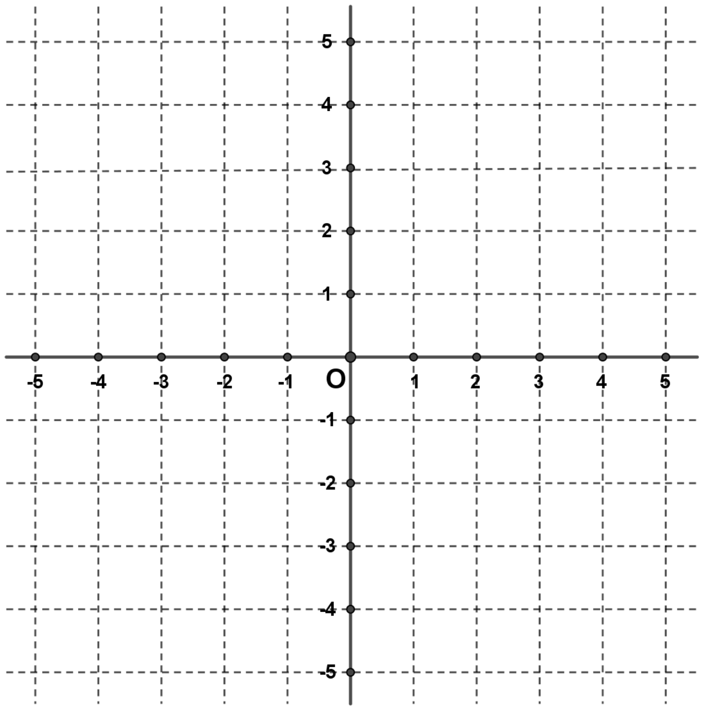
2. Déterminer les coordonnées d'un vecteur normal à la droite (d).

3. Déterminer une équation cartésienne de la droite perpendiculaire à (d) passant par A.

4. En déduire que le point H projeté orthogonal de A sur la droite (d) a pour coordonnées (-1 ;-1).

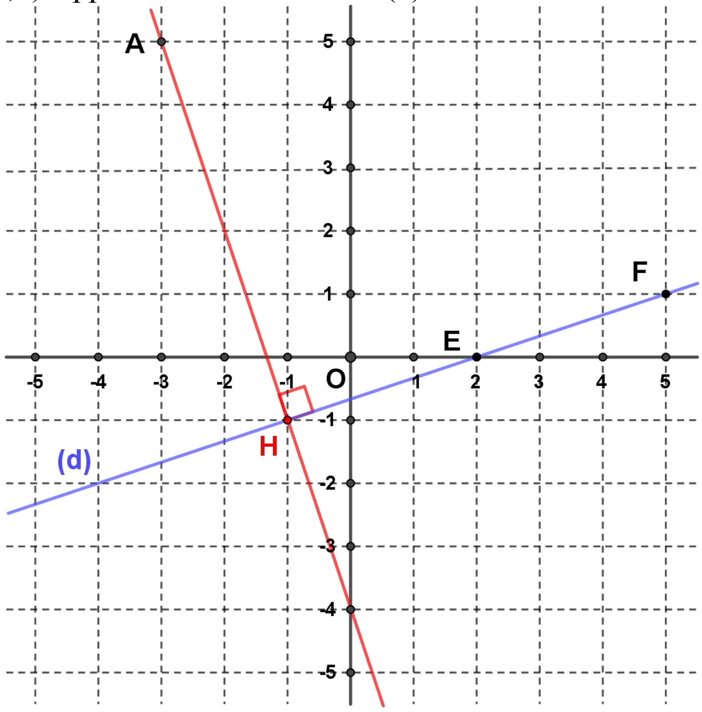
5. En déduire la distance entre le point A et la droite (d).

ANNEXE
à rendre avec la copie



CORRECTION

1. Les points E(2;0) et F(5;1) appartiennent à la droite (d).



2. $(\mathrm{d}) : -x+3y+2=0$ donc le vecteur $\vec{N}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à (d).

3. La droite passant par A(-3;5) et perpendiculaire à (d) est la droite (δ) passant par A et de vecteur directeur $\vec{N}$.

M(x;y) $\quad \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x+3\\y-5\end{pmatrix} \quad \vec{N}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$

$M \in \delta \Leftrightarrow$ les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{N}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow \begin{vmatrix}x+3 & -1\\ y-5 & 3\end{vmatrix}=0$

$\Leftrightarrow 3\times(x+3)+1\times(y-5)=0 \Leftrightarrow 3x+y+4=0$

4. H est le point d'intersection de (d) et (δ).

On résout le système $\begin{cases}-x+3y+2=0\\ 3x+y+4=0\end{cases}$

$-x+3y+2=0 \Leftrightarrow x=3y+2$.

On reporte dans la deuxième équation :

$3\times(3y+2)+y+4=0 \Leftrightarrow 9y+6+y+4=0 \Leftrightarrow 10y+10=0 \Leftrightarrow y=-1$

$x=3\times(-1)+2 \Leftrightarrow x=-1$.

Les droites (d) et (δ) sont sécantes en H(-1 ;-1).

5. La distance entre le point A et la droite (d) est AH.

$AH^2=(x_H-x_A)^2+(y_H-y_A)^2=(-1+3)^2+(-1-5)^2=2^2+6^2=4+36=40$

$AH=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$

EXERCICE 4 (5 points)

Les résultats seront donnés sous formes de fractions irréductibles.

Une enquête a été mené auprès de lycéens pour estimer la proportion de ceux qui ont déjà consommé du cannabis. Pour encourager les réponses sincères, on met en place le protocole suivant :

Chaque adolescent lance d'abord un dé équilibré à 6 faces et l'enquêteur qui va l'interroger ne connaît pas le résultat du lancer.

À la question « avez-vous déjà consommé du cannabis ? », l'adolescent doit répondre :

. « non » si le résultat du lancer est 5, qu'il ait ou non déjàconsommé du cannabis ;

. « oui » si le résultat du lancer est 6, qu'il ait ou non déjà consommé du cannabis ;

. « oui » ou « non » dans les autres cas, mais de façon sincère.

On note :

. N : l'événement l'adolescent a répondu « non » ;

. O : l'événement l'adolescent a répondu « oui » ;

. C : l'événement l'adolescent a déjà consommé du cannabis.

. $\bar{C}$: l'événement l'adolescent n'a jamais consommé du cannabis.

Sur les lycéens qui ont participé à cette enquête, on constate que la probabilité qu'un adolescent ait répondu « oui » est de $\frac{3}{5}$, soit $P(O)=\frac{3}{5}$.

On veut déterminer la probabilité, notée p, qu'un adolescent ait déjà consommé du cannabis.

On a donc $P(C)=p$.

1. Justifier que la probabilité qu'un adolescent ait répondu « oui » sachant qu'il n'a jamais consommé du cannabis est $\frac{1}{6}$.

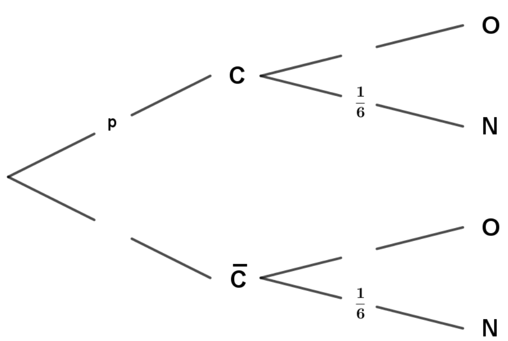
2. On a représenté en annexe l'arbre de probabilité représentant la situation.
Compléter l'arbre sur l'annexe à rendre avec la copie.

3.a. Démontrer que la probabilité p qu'un adolescent ait déjà consommé du cannabis vérifie l'équation :
$\frac{2}{3}p+\frac{1}{6}=\frac{3}{5}$.

3.b. En déduire la valeur de p.

4. Sachant qu'un adolescent a répondu « non » pendant l'enquête, quelle est la probabilité qu'il n'ait jamais consommé de cannabis ?

ANNEXE
à rendre avec la copie



CORRECTION

1. L'adolescent a répondu « oui » sachant qu'il n'a jamais consommé du cannabis si et seulement si l'adolescent a obtenu 6 an lancer du dé.

Donc la probabilité de cet événement est : $\frac{1}{6}$ c'est à dire $P_{\bar{C}}(O)=\frac{1}{6}$.

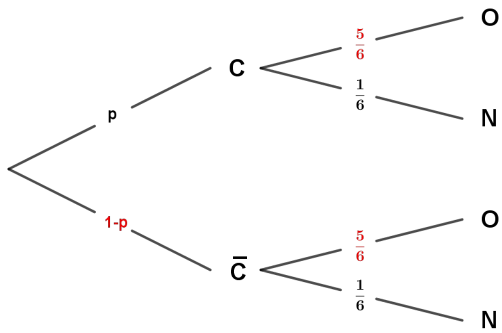
2. $P(C)=p$ donc $P(\bar{C})=1-p$.

$P_{\bar{C}}(O)=\frac{1}{6}$ donc $P_{\bar{C}}(N)=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$.

L'adolescent a répondu « non » sachant qu'il a déjà consommé du cannabis si et seulement si l'adolescent a obtenu 5 au lancer du dé.

Donc $P_C(N)=\frac{1}{6}$ et $P_C(O)1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$.

On complète l'arbre de probabilités



3.a. En utilisant l'arbre de probabilités ou la formule des probabilités totales, on obtient :

$P(O)=P(C\cap O)+P(\bar{C}\cap O)=P(C)\times P_C(O)+P(\bar{C})\times P_{\bar{C}}(O)$

$P(O)=p\times\frac{5}{6}+(1-p)\times\frac{1}{6}=\frac{5}{6}\times p+\frac{1}{6}-\frac{1}{6}\times p=\frac{4}{6}\times p+\frac{1}{6}=\frac{2}{3}\times p+\frac{1}{6}$

Or l'énoncé précise que $P(O)=\frac{3}{5}$.

Conséquence : $\frac{2}{3}p+\frac{1}{6}=\frac{3}{5}$

3.b. $\frac{2}{3}p+\frac{1}{6}=\frac{3}{5} \Leftrightarrow \frac{2}{3}p=\frac{3}{5}-\frac{1}{6}=\frac{18-5}{30}=\frac{13}{30} \Leftrightarrow p=\frac{13}{30}\times\frac{3}{2}=\frac{13}{20}$.

4. On nous demande de calculer $P_N(\bar{C})$

$P_N(\bar{C})=\frac{P(\bar{C}\cap N)}{P(N)}$

$P(N)=1-P(O)=1-\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$

$P(\bar{C})=1-p=1-\frac{13}{20}=\frac{7}{20}$

$P(\bar{C}\cap N)=P(\bar{C})\times P_{\bar{C}}(N)=\frac{7}{20}\times\frac{1}{6}=\frac{7}{120}$

$P_N(\bar{C})=\frac{7}{120}\times\frac{5}{2}=\frac{7}{48}$