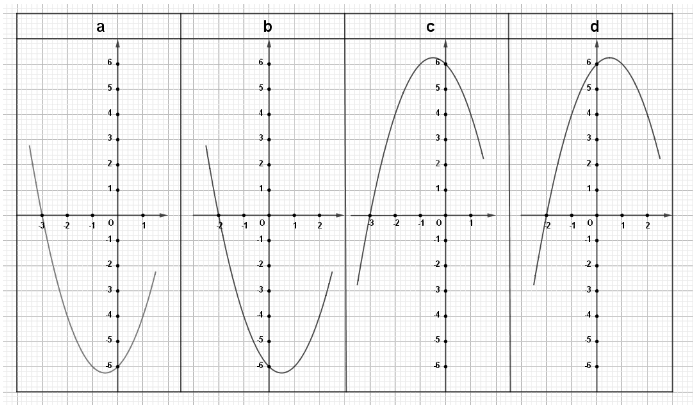
Sujet 23

EXERCICE 1 (5 points)

Cet exercice est un QCM et comprend cinq questions.
Pour chacune des questions, une seule des quatre réponses proposées est correcte.
Les questions sont indépendantes.
Pour chaque question, indiquer le numéro de la question et recopier la lettre correspondant à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée, mais il peut être nécessaire d'effectuer des recherches au brouillon pour aider à déterminer votre réponse.
Chaque réponse correcte rapporte un point. Une réponse incorrecte ou une question sans réponse n'apporte ni ne retire aucun point.

Question 1

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=-x^2-x+6$.
On admet que l'une des quatre courbes représente la fonction f. Laquelle ?



Question 2

On pose pour tout réel x : $A(x)=e^{2x}$. On a alors pour tout réel x :

a)	$A(x) = e^{2x}$	b)	$A(x) = e^{x^2}$
c)	$A(x) = e^x + e^2$	d)	$A(x) = (e^x)^2$

Question 3

Le plan est muni d'un repère orthonormé.
Les droites d'équations : $2x+y+1=0$ et $3x-2y+5=0$:

a)	sont sécantes en A(1;1)	b)	sont sécantes en B(1;-1)
c)	sont sécantes en C(-1;1)	d)	ne sont pas sécantes

Question 4

Le plan est muni d'un repère orthonormé.
Les droites d'équations $x+3y-5=0$ et $3x-y+6=0$ sont :

a)	sont sécantes en A(1;1)	b)	sont sécantes en B(1;-1)
c)	sont sécantes en C(-1;1)	d)	ne sont pas sécantes

Question 5

On considère la fonction Python ci-dessous.

```
def suite(n):
  n=2
  k=0
  while k<n:
    u=u+k
    k=k+1
  return u
```

Quelle valeur renvoie l'appel suite(5) ?

a)	5	b)	8
c)	12	d)	17

CORRECTION

Question1 Réponse : c

Preuve non demandée

$$f(x)=-x^2-x+6=-(x^2+x)+6=-\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\right]+6=-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{25}{4}.$$

f admet un maximum pour $x=-\frac{1}{2}$ qui est égal à $\frac{25}{4.}$. On obtient la courbe **c.**

Question 2 Réponse : d

Preuve non demandée

Pour tous nombres réels a et b, on a : $e^{a\times b}=(e^a)^b=(e^b)^a$.

Donc $e^{2x}=(e^x)^2$.

Question 3 Réponse : c

Preuve non demandée

D_1 : $2x+y+1=0$ et D_2 : $3x-2y+5=0$

A(1;1) n'appartient ni à D_1 ni à D_2.

B(1 ;-1) n'appartient ni à D_1 ni à D_2.

$C(-1;1)$ appartient à D_1 et à D_2 et les droites D_1 et D_2 ne sont pas parallèles.

D_1 et D_2 sont sécantes en C(-1;1).

Question 4 Réponse : a

Preuve non demandée

D_1 : $x+3y-5=0$ et D_2 : $3x-y+6=0$.

$\vec{N}_1 \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à D_1 et $\vec{N}_2 \begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à D_2.

$\vec{N}_1.\vec{N}_2=1\times3+3\times(-1)=0$ donc les droites D_1 et D_2 sont perpendiculaires.

Question 5 Réponse : c

Preuve non demandée

$1^{\text{ère}}$ boucle :	$0<5$	u=2 et k=1
$2^{\text{ème}}$ boucle :	$1<5$	u=3 et k=2
$3^{\text{ème}}$ boucle :	$2<5$	u=5 et k=3
$4^{\text{ème}}$ boucle :	$3<5$	u=8 et k=4
$5^{\text{ème}}$ boucle :	$4<5$	u=12 et k=5

EXERCICE 2 (5 points)

On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{e^x}{1+x}$.

On note C_f la représentation graphique de f dans un repère du plan.

1. Déterminer les coordonnées du point A intersection de la courbe C_f et de l'axe des ordonnées.

2. La courbe C_f coupe-t-elle l'axe des abscisses ?
Justifier la réponse.

3. On note f' la dérivée de la fonction f sur $[0;+\infty[$.

Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $[0;+\infty[$ $f'(x)=\dfrac{x\,e^x}{(1+x)^2}$.

4. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $[0;+\infty[$.
En déduire le sens de variation de f sur $[0;\infty[$.

5. On note T la tangente à C_f au point B d'abscisse 1,6.
La tangente T passe-t-elle par l'origine du repère ?
Justifier la réponse ?

CORRECTION

1. $f(0)=\frac{e^0}{1+0}=\frac{1}{1}=0$

Le point A(0;1) est le point d'intersection de C_f et de l'axe des ordonnées.

2. Pour tout nombre réel x on a $e^x>0$ donc l'équation $\frac{e^x}{1+x}=0$ n'admet pas de solution.

La courbe C_f ne coupe pas l'axe des abscisses.

3. $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'\times v-u\times v'}{v^2}$

$u(x)=e^x \qquad u'(x)=e^x$

$v(x)=1+x \qquad v'(x)=1$

$f'(x)=\frac{e^x\times(1+x)-e^x\times 1}{(1+x)^2}=\frac{x e^x}{(1+x)^2}$

4. Pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0;+\infty[$, on a $e^x>0$ et $(1+x)^2>0$.
Le signe de $f'(x)$ sur $[0;+\infty[$ est le signe de x.

x	0	$+\infty$
f '(x)	0 +	

f est strictement croissante sur $[0,+\infty[$.

5. (T) est la tangente à la courbe C_f au point B d'abscisse 1,6.
(T) est la droite passant par le point B(1,6;f(1,6)) et de coefficient directeur $f'(1,6)$.

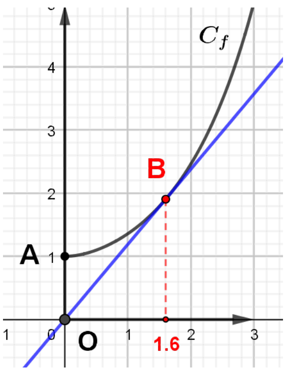
$f(1,6)=\frac{e^{1,6}}{2,6} \qquad f'(1,6)=\frac{1,6\times e^{1,6}}{2,6^2}$

(T) : $y-f(1,6)=f'(1,6)(x-1,6)$

(T) : $y=\frac{1,6\times e^{1,6}}{2,6^2}x+\frac{e^{1,6}}{2,6}-\frac{1,6^2\times e^{1,6}}{2,6^2}$.

L'ordonnée à l'origine de (T) est égale à $\frac{e^{1,6}}{2,6}\left(1-\frac{1,6^2}{2,6}\right)=0,03$ à 10^{-2} près.

Donc (T) ne passe pas par l'origine.



La droite (OB) n'est pas la tangente à la courbe C_f au point B.

EXERCICE 3 (5 points)

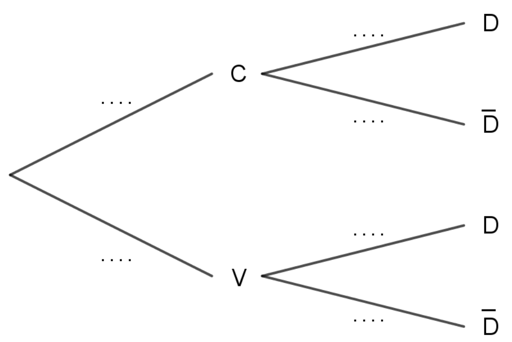
Dans cet exercice pour tout événement A, on note $\bar{A}$ son événement contraire, $P(A)$ sa probabilité et si B est un événement de probabilité non nulle, $P_B(A)$ la probabilité conditionnelle de A sachant B.

Une entreprise a fabriqué en un mois 1500 chaudières, dont 900 chaudières à cheminée et 600 chaudières à ventouse.
On a constaté, dans ce lot, que :
. 1 % des chaudières à cheminée ont un défaut.
. 6 % des chaudières à ventouse ont un défaut.
On prélève au hasard le numéro de série d'une chaudière de la production de ce mois.
On considère les événements suivants :
. C : « le numéro de série est celui d'une chaudière à cheminée ».
. V : « le numéro de série est celui d'une chaudière ventouse ».
. D : « le numéro de série est celui d'une chaudière défectueuse ».

1. Recopier et compléter su la copie le tableau à double entrée suivant :

	nombre de chaudières à cheminée	nombre de chaudières à ventouse	Total
nombre de chaudières défectueuses			
Nombre de chaudières non défectueuses			
Total	900	600	1500

2. Recopier et compléter l'arbre pondéré suivant :



3. Calculer la probabilité que le numéro de série soit celui d'une chaudière défectueuse.

4. Déterminer $P_D(V)$. Interpréter le résultat dans le contexe de l'exercice.

5. Les événements D et V sont-ils indépendants ?

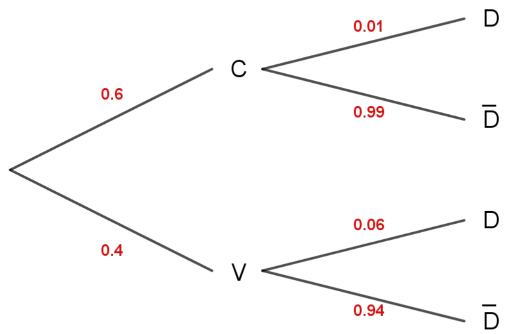
CORRECTION

1. Il y a 1 % des chaudières à cheminée défectueuses $900\times\frac{1}{100}=9$, il y a donc $900-9=891$ chaudières à cheminée non défectueuses.

Il y a 6 % des chaudières à ventouse défectueuses $600\times\frac{6}{100}=36$, il y a donc $600-36=564$ chaudières à ventouse non défectueuses.
Il y a $9+36=45$ chaudières défectueuses et $891+564=1455$ chaudières non défectueuses.
Remarque : $1500-45=1455$.

	nombre de chaudières à cheminée	nombre de chaudières à ventouse	Total
nombre de chaudières défectueuses	9	36	45
Nombre de chaudières non défectueuses	891	564	1455
Total	900	600	1500

2. Il y a 900 chaudières à cheminée parmi les 1500 chaudières fabriquées pendant le mois donc :
$P(C)=\frac{900}{1500}=\frac{3}{5}=0,6$.
$V=\overline{C}$ et $P(V)=1-P(C)=1-0,6=0,4$.
1 % des chaudières à cheminée ont un défaut donc $P_C(D)=0,01$ et $P_C(\overline{D})=1-P_C(D)=1-0,01=0,99$.
6 % des chaudières à ventouse ont un défaut donc $P_V(D)=0,06$ et $P_V(\overline{D})=1-P_V(D)=1-0,06=0,94$.
On obtient l'arbre pondéré :



3. En utilisant le tableau à double entrée, le cardinal de D est : 45 donc $P(D)=\frac{45}{1500}=\frac{3}{100}=0,03$.

En utilisant l'arbre pondéré ou la formules des probabilités totales :
$P(D)=P(C\cap D)+P(V\cap D)=P(C)\times P_C(D)+P(V)\times P_V(D)=0,6\times0,01+0,4\times0,06$
$P(D)=0,006+0,024=0,03$

4. $P_D(V)=\frac{P(V\cap D)}{P(D)}=\frac{0,024}{0,03}=\frac{24}{30}=\frac{8}{10}=0,8$
Si une chaudière a un défaut alors il y a 80 % de chance que ce soit une chaudière à ventouse.

5. $P(D\cap V)=0,024$ et $P(D)\times P(V)=0,03\times0,4=0,012$
$P(D\cap V)\neq P(D)\times P(V)$
Les événements D et V ne sont pas indépendants.

EXERCICE 4 (5 points)

Un jeu vidéo fait évoluer un personnage sur un parcours semé d'obstacles.
Au début du parcours, ce personnage est doté de 1000 pions noirs dans son sac et il n'y a pas de pion blanc.
Le nombre de pions noirs diminue au cours du jeu.
Le personnage gagne 10 pions blancs par minute jouée.
Chaque partie est chronométrée et dure 45 minutes. Au bout des 45 minutes la partie s'arrête et le joueur a gagné si le nombre de pions blancs gagnés est supérieur au nombre de pions noirs du sac.

1. Étude de l'évolution du nombre des pions blancs.
On note u_n le nombre de pions blancs obtenus au bout de n minutes de jeu.
Ainsi $u_0=0$.
Déterminer la nature de la suite (u_n) et en déduire, pour tout entier naturel n, l'expression de u_n en fonction de n.

2. Étude de l'évolution du nombre de pions noirs.
Lucas estime qu'au cours d'une partie, le nombre de ses pions noirs diminue de $2\ \%$ par minute.
Il voudrait savoir si cette évolution est suffisante pour gagner, ou s'il doit poursuivre son entraînement.
On note v_n le nombre de pions restant à la $n^{\text{ième}}$ minute.
Ainsi $v_0=1000$.

2.a. Justifier que $v_1=980$.

2.b. Déterminer la nature de la suite (v_n) et en déduire, pour tout entier naturel n, l'expression de v_n en fonction de n.

3. On a calculé les premiers termes des s uites (u_n) et (v_n) à l'aide d'un tableur. La feuille de calcul est donnée ci-dessous.
Les termes de la suite (v_n) ont été arrondis à l'unité.
Lucas peut-il gagner la partie ?

	A	B	C
1	n	un	vn
2	0	0	1000
3	1	10	980
4	2	20	960
5	3	30	941
6	4	40	922
7	5	50	904
8	6	60	886
9	7	70	868
10	8	80	851
41	39	390	455
42	40	400	446
43	41	410	437
44	42	420	428
45	43	430	419
46	44	440	411
47	45	450	403
48	46	460	395
49	47	470	387
50	48	480	379
51	49	490	372
52	50	500	364

CORRECTION

1. Le personnage gagne 10 pions blancs par minute jouée.
Pour tout entier naturel n : $u_{n+1}=u_n+10$.
La suite (u_n) est la suite arithmétique de premier terme $u_0=0$ et de raison $r=10$.
Pour tout entier naturel n :
$u_n=u_0+nr=10n$.

2.a. Le nombre de pions noirs diminue de 2 % par minute jouée.
$$v_1=v_0-\frac{2}{100}\times v_0=1000-\frac{2}{100}\times 1000=1000-20=980 .$$

2.b. Pour tout entier naturel n :
$$v_{n+1}=v_n-\frac{2}{100}\times v_n=v_n-0{,}02\,v_n=(1-0{,}02)\,v_n=0{,}98\,v_n .$$
La suite (v_n) est la suite géométrique de premier terme $v_0=1000$ et de raison $q=0{,}98$.
Pour tout entier naturel n :
$v_n=v_0\times q^n=1000\times 0{,}98^n$

3. La feuille de calcul obtenue par le tableur, nous donne :
$u_{45}=450>v_{45}=403$.
Donc au bout de 45 minutes le nombre de pions blancs est supérieur au nombre de pions noirs.
Lucas gagne la partie.