Sujet 24

EXERCICE 1 (5 points)

Cet exercice est un QCM et comprend cinq questions.
Pour chacune des questions, une seule des quatre réponses proposées est correcte.
Les questions sont indépendantes.
Pour chaque question, indiquer le numéro de la question et recopier la lettre correspondant à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée, mais il peut être nécessaire d'effectuer des recherches au brouillon pour aider à déterminer votre réponse.
Chaque réponse correcte rapporte un point. Une réponse incorrecte ou une question sans réponse n'apporte ni ne retire aucun point.

Question 1
Dans un repère orthonormé, un vecteur normal à la droite d'équation : $4x+5y-32=0$ est le vecteur :

a) $\vec{v}\begin{pmatrix}-5\\4\end{pmatrix}$ **b)** $\vec{v}\begin{pmatrix}-4\\5\end{pmatrix}$ **c)** $\vec{v}\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}$ **d)** $\vec{v}\begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix}$

Question 2
Dans un repère orthonormé, le projeté orthogonal du point A(7;9) sur la droite d'équation $4x+5y-32=0$ est le point :

a) H(7;0,8) **b)** H(3;4) **c)** H(4;3,2) **d)** H(4;5)

Question 3
Dans un repère orthonormé, une équation du cercle de centre A(-1;3) et de rayon 2 est :

a) $x^2-1+y^2=2^2$ **b)** $x^2+2x+1+y^2-6y+9=2$
c) $(x+1)^2+(y-3)^2=2^2$ **d)** $(x-1)^2+(y+3)^2=2^2$

Question 4
Dans un repère orthonormé, la parabole d'équation $y=3x^2-9x+5$ a pour sommet le point S et pour axe de symétrie la droite Δ . Les coordonnées de S et l'équation de Δ sont :

a) $S\left(\frac{3}{2};-\frac{7}{4}\right)$ et $\Delta:\ x=\frac{3}{2}$ **b)** $S\left(\frac{3}{2};-\frac{7}{4}\right)$ et $\Delta:\ y=-\frac{7}{4}$
c) $S(3;5)$ et $\Delta:\ x=3$ **d)** $S(3;5)$ et $\Delta:\ y=5$

Question 5
On considère l'inéquation : $-x^2+9x+5>0$.
L'ensemble S des solutions de cette inéquation est (x_1 et x_2 sont deux réels tels que $x_1 < x_2$ pour les propositions b) et d)) :

a) $\emptyset$ **b)** de la forme $]-\infty;x_1[\cup]x_2;+\infty[$
c) $\mathbb{R}$ **d)** de la forme $]x_1;x_2[$

CORRECTION

1. **Question 1** **Réponse :** c

   Preuve non demandée

   Dans un repère orthonormé, si la droite D a pour équation : $a x+b y+c=0$ (avec $a^2+b^2\neq 0$) alors le vecteur $\vec{N}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à D.

   Donc pour la droite d d'équation : $4x+5y-32=0$, le vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal ;

2. **Question 2** **Réponse :** b

   Preuve non demandée

   H est le projeté orthogonal de A sur la droite d d'équation : $4x+5y-32=0$ si et seulement si H appartient à d **et** si le vecteur $\overrightarrow{AH}$ est colinéaire au vecteur $\vec{N}\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ (normal à d).

   a) $4\times 7+5\times 0{,}8-32=28+4-32=0$ H appartient à d ; $\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix} 0 \\ -8{,}2 \end{pmatrix}$ non colinéaire à $\vec{N}$.

   L'affirmation **a)** est fausse.

   b) $4\times 3+5\times 4-32=12+20-32=0$ H appartient à d ; $\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AH}=\vec{N}$.

   L'affirmation **b)** est vraie.

3. **Question 3** **Réponse :** c

   Preuve non demandée

   Une équation cartésienne du cercle $\mathscr{C}$ de centre A(a;b) et de rayon R >0 est : $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$.
   Si A(-1;3) et R=2 alors une équation cartésienne de $\mathscr{C}$ est : $(x+1)^2+(y-3)^2=2^2$.

4. **Question 4** **Réponse:** a

   Preuve non demandée

   $y=3x^2-9x+5$ on écrit le trinôme sous forme canonique.

   $$3x^2-9x+5=3(x^2-3x)+5=3\left[\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}\right]+5=3\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{27}{4}+5=3\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{7}{4}$$

   $S\left(\frac{3}{2};-\frac{7}{4}\right)$ est le sommet de la parabole et $\Delta :\ x=\frac{3}{2}$ son axe de symétrie.

5. **Question 5** **Réponse :** d

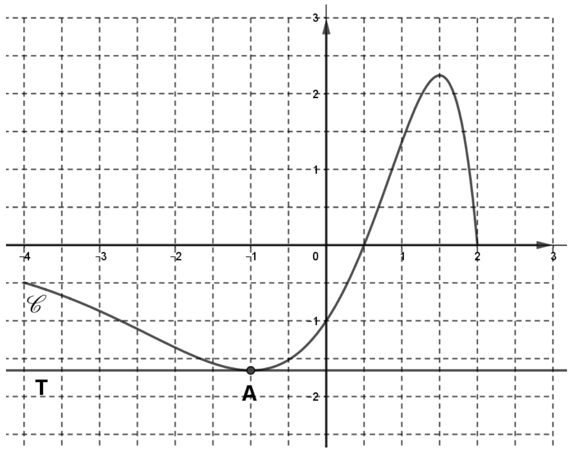
   Preuve non demandée

   $T(x)=-x^2+9x+5$ $\qquad \Delta=9^2-4\times(-1)\times 5=101>0$

   T(x) admet deux racines distinctes x_1 et x_2 (on suppose que x_1 est la plus petite des deux racines).
   Le coefficient de x^2 est négatif, donc l'ensemble des solutions de $T(x)<0$ est : $S=]x_1;x_2[$.

EXERCICE 2 (5 points)

On considère la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle [-4;2].
La fonction dérivée de f est notée f'.
Dans lerepère orthonormé ci-dessous, la courbe $\mathscr{C}$ est la courbe représentative de f sur [-4;2].
Le point A est le point de la courbe $\mathscr{C}$ d'abscisse -1.
La droite T est la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ en A.



1. Par lecture graphique, donner la valeur de $f'(-1)$.

2. Résoudre graphiquement, l'inéquation $f'(x) \leqslant 0$.

On admet que la fonction f est définie sur [-4;2] par : $f(x)=(-x^2+2{,}5x-1)e^x$.

3. Vérifier que, pour tout nombre réel x de l'intervalle [-4;2] $f'(x)=(-x^2+0{,}5x+1{,}5)e^x$.

4. Étudier le signe de la fonction f' sur [-4;2].

5. En déduire les variations de f sur l'intervalle [-4;2].

CORRECTION

1. La tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse -1 est horizontale donc $f'(-1)=0$.

2. Graphiquement, on remarque que f est décroissante sur [-4 ;-1] et sur [1,5 ;2] et croissante sur [-1;1,5].
Donc l'ensemble des solutions de l'inéquation $f'(x)\leqslant 0$ est $S=[-4\,;-1]\cup[1{,}5\,;2]$.

3. $u(x)=-x^2+2{,}5x-1$ $\qquad$ $u'(x)=-2x+2{,}5$
$v(x)=e^x$ $\qquad$ $v'(x)=e^x$
$(u\times v)'=u'\times v+u\times v'$
$f'(x)=(-2x+2{,}5)e^x+(-x^2+2{,}5x-1)e^x=(-x^2+0{,}5x+1{,}5)e^x$

4. Pour tout nombre réel x de l'intervalle [-4;2] $e^x>0$ donc le signe de $f'(x)$ est le signe du trinôme $T(x)=-x^2+0{,}5x+1{,}5$.
$\Delta=0{,}5^2-4\times(-1)\times 1{,}5=0{,}25+6=6{,}25 \qquad \Delta=2{,}5^2$
$x_1=\dfrac{-0{,}5+2{,}5}{-2}=\dfrac{2}{-2}=-1 \qquad x_2=\dfrac{-0{,}5-2{,}5}{-2}=\dfrac{-3}{-2}=1{,}5$
Le signe de x^2 dans le trinôme T(x) est négatif.
On donne le signe de $f'(x)$ sous la forme d'un tableau.

x	-4		-1		1.5		2
f '(x)		–	0	+	0	–	

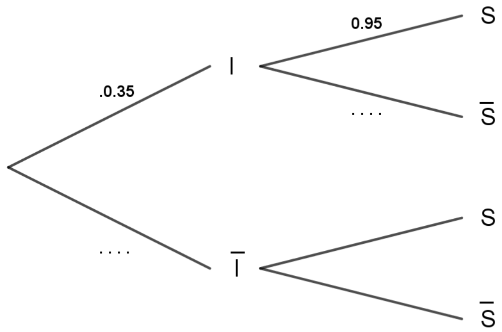
5. On donne les variations de f sur la forme d'un tableau.

x	-4		-1		1.5		2
f '(x)		–	0	+	0	–	
f(x)		↗		↘		↗	

EXERCICE 3 (5 points)

Laura reçoit chaque jour beaucoup de courriels. Pour se protéger des courriels indésirables, elle achète un logiciel anti-spam. Chaque jour, 15 % des courriels reçus par Laura sont indésirables ; 95 % des courriels indésirables sont automatiquement bloqués par le logiciel anti-spam. Parmi les courriels qui ne sont pas indésirables, le logiciel anti-spam en bloque 2 %.
On choisit au hasard un courriel reçu par Laura. Chaque courriel a la même probabilité d'être choisi.
On considère les événements suivants :
. I : « le courriel choisi est indésirable »,
. S : « le logiciel anti-spam bloque le courriel choisi ».
Pour tout événement A, on note $\overline{A}$ l'événement contraire de A. Pour tous événements A et B avec B de probabilité non nulle, la probabilité de A sachant B est notée $P_B(A)$.

1. Recopier et compléter sur la copie l'arbre de probabilité traduisant la situation.



2. Calculer la probabilité que le courriel reçu par Laura ne soit pas indésirable et soit bloqué par le logiciel anti-spam.

3. Montrer que $P(S)=0{,}3455$.

4. Le logiciel anti-spam a bloqué un courriel reçu par Laura, calculer la probabilité que ce courriel soit indésirable. On donnera le résultat cherché à 10^{-2}.

5. Le fournisseur du logiciel anti-spam affirme que son logiciel se trompe dans moins de 2 % des cas. Est-ce vrai ? Justifier votre réponse.

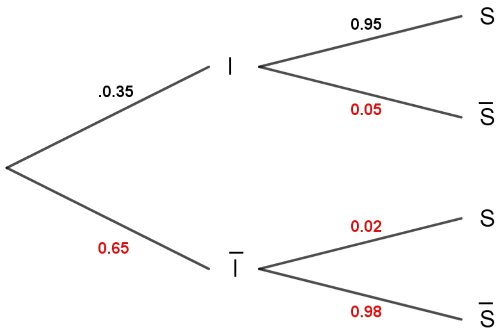
CORRECTION

1. 35 % des courriels reçus par Laura sont indésirables donc $P(I)=0{,}35$ et $P(\overline{I})=1-P(I)=1-0{,}35=0{,}65$.

. 95 % des courriels indésirables sont automatiquement bloqués par le logiciel anti-spam donc $P_I(S)=0{,}95$ et $P_I(\overline{S})=1-P_I(S)=1-0{,}95=0{,}05$.

. Parmi les courriels qui ne sont pas indésirables, le logiciel anti-spam en bloque : 2 % donc $P_{\overline{I}}(S)=0{,}02$ et $P_{\overline{I}}(\overline{S})=1-P_{\overline{I}}(S)=1-0{,}02=0{,}98$.

. On obtient pour arbre de probabilité :



2. $P(\overline{I}\cap S)=P(\overline{I})\times P_{\overline{I}}(S)=0{,}65\times 0{,}02=0{,}013$

3. En utilisant la formule des probabilités :

$P(S)=P(I\cap S)+P(I\cap S)=0{,}013+P(I)\times P_I(S)=0{,}013+0{,}35\times 0{,}95=0{,}013+0{,}3325$

$P(S)=0{,}3455$

4. On nous demande de calculer $P_S(I)$.

$P_S(I)=\dfrac{P(S\cap I)}{P(S)}=\dfrac{0{,}3325}{0{,}3455}=\dfrac{665}{691}$ $\quad P_S(I)=0{,}96$ à 10^{-2} près.

5. Le logiciel se trompe lorsque le courriel est indésirable et n'est pas bloqué **ou** si le logiciel n'est pas indésirable et est bloqué.

Soit t la probabilitéque le logiciel se trompe :

$t=P(I\cap\overline{S})+P(\overline{I}\cap S)=P(I)\times P_I(\overline{S})+0{,}013=0{,}35\times 0{,}05+0{,}013=0{,}0175+0{,}013=0{,}0305$

Donc le logiciel se trompe dans plus de 3 % des cas donc l'affirmation du fournisseur est fausse.

EXERCICE 4 (5 points)

Durant le mois de janvier 2020, une entreprise produit 2500 flacons de parfum ce qui correspond exactement au nombre de flacons commandés. Le propriétaire de l'entreprise décide d'augmenter chaque mois la production de 108 flacons et il espère que le nombre de flacons commandés augtera chaque mois de 3,8 %.
On considère la suite (f_n) où pour tout entier naturel n, f_n modélise le nombre de flacons produits lors du mois de rang n après janvier 2020 ; ainsi f_0 est le nombre de flacons produits en janvier 2020, f_1 est le nombre de flacons produits en février 2020, etc . . .
De la même manière, on considère la suite (c_n) où pour entier naturel n, modélise le nombre potentiel de flacons commandés lors du mois de rang n après janvier 2020. On a donc $f_0=c_0=2500$.

1. Déterminer, en expliquant les calculs effectués, le nombre de flacons produits et le nombre potentiel de commandés en février 2020.

2. Déterminer la nature des suites (f_n) et (c_n).

3. Exprimer, pour tout entier n, f_n et c_n en fonction de n.

4. On admet que, selon ce modèle, au bout d'un certain nombre de mois le nombre potentiel de flacons commandés dépassera le nombre de flacons produits.
Reproduire et compléter sur la copie l'algorithme ci-dessous, écrit en Python, afin qu'après son exécution la variable contienne le nombre de mois à attendre après le mois de janvier 2020 pour que le nombre potentiel de flacons commandés dépasse le nombre de flacons produits.

```
n=0
f=2500
c=2500
while . . . .:
  n= . . .
  f= . . .
  c= . . .
```

5. De début janvier 2020 à fin décembre 2020, la production globale dépassera-t-elle le nombre de commandes potentielles ?
Expliquer votre démarche.
On rappelle que :

- Si (u_n) est une suite arithmétique de premier terme u_0 , alors pour tout entier naturel n :
$u_0+u_1+\ldots+u_n=(n+1)\dfrac{u_0+u_n}{2}$.
- Si (v_n) est une suite géométrique de raison $q\neq 1$ alors, pour tout entier naturel n :
$v_0+v_1+\ldots+v_n=v_0\dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$

CORRECTION

1. Le propriétaire de l'entreprise décide d'augmenter chaque mois la production de 108 flacons.
En janvier 2020 l'entreprise produit 2500 flacons, donc en février l'entreprise produit :
2500+108=2608 flacons $f_1=2608$

. Le propriétaire de l'entreprise que le nombre de » flacons commandés augmentera chaque mois de 3,8 %.
En janvier le nombre de flacons commandés est 2500, donc en février le nombre de flacons commandés sera
$2500+\frac{3,8}{100}\times 2500=2500+\frac{3,8}{25}=2500+85=2585$ flacons. $c_1=2585$.

2. Pour tout entier naturel n, $f_{n+1}=f_n+108$ (augmentation de 108 chaque mois).
(f_n) est la suite arithmétique de premier terme $f_0=2500$ et de raison $r=108$.

. Pour tout entier naturel n, $c_{n+1}=c_n+\frac{3,8}{100}\times c_n=c_n+0,038\times c_n=1,038\,c_n$ (augmentation de 3,8 % chaque mois). (c_n) est la suite géométrique de premier terme $c_0=2500$ et de raison $q=1,038$.

3. Pour tout entier naturel n :
$f_n=f_0+nr=2500+108\,n$
$c_n=c_0\times q^n=2500\times 1,038^n$

4. Algorithme complété

```
n=0
f=2500
c=2500
while f >=c:
    n=n+1
    f= f+108
    c= 1.038*c
```

Si on exécute l'algorithme on obtient : $n=8$ c'est à dire c_8 est supérieur à f_8 pour le premier mois.
Le mois de septembre sera le premier mois pour lequel le nombre potentiel de flacons commandés sera supérieur au nombre de flacons produits.
On peut vérifier à la calculatrice.

$f_7=3256$ $f_8=3364$
$c_7=3246$ (arrondi à l'unité) $c_8=3369$ (arrondi à l'unité)

5. Pendant les douze mois de 2020 l'entreprise aura produit $(f_0+f_1+\ldots+f_{11})$ flacons.
Or $f_0+f_1+\ldots+f_{11}=(11+1)\times\frac{f_0+f_{11}}{2}$ $f_{11}=3688$ $\frac{f_0+f_{11}}{2}=3094$
et $f_0+f_1+\ldots+f_{11}=12\times 3094=37128$
Pendant les douze mois de 2020 le nombre potentiel de flacons commandés sera : $c_0+c_1+\ldots+c_{11}$
Or $c_0+c_1+\ldots+c_{11}=c_0\times\frac{1-q^{12}}{1-q}$ $c_0=2500$ $\frac{1-1,038^{12}}{1-1,038}=14,8546$ (arrondi à 10^{-4})
et $c_0+c_1+\ldots+c_{11}=37136$ (arrondi à l'unité).
Donc la production globale pendant l'année 2020 ne dépassera pas le nombre de commandes potentielles.