Sujet 25

EXERCICE 1 (5 points)

Cet exercice est un QCM et comprend cinq questions.
Pour chacune des questions, une seule des quatre réponses proposées est correcte.
Les questions sont indépendantes.
Pour chaque question, indiquer le numéro de la question et recopier la lettre correspondant à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée, mais il peut être nécessaire d'effectuer des recherches au brouillon pour aider à déterminer votre réponse.
Chaque réponse correcte rapporte un point. Une réponse incorrecte ou une question sans réponse n'apporte ni ne retire aucun point.

Question 1
Dans le plan muni d'un repère orthonormé, l'ensemble des points M de coordonnées (x;y) vérifiant $(x+1)^2+(y-1)^2=9$ est :

a) un cercle	b) une droite	c) une parabole	d) l'ensemble vide

Question 2
Combien y a-t-il de fonctions polynômes du second degré qui s'annulent en 1 et 3 ?

a) 0	b) 1 seule	c) 2	d) une infinité

Question 3
Une fonction polynôme du second degré :

a) est nécessairement de signe constant sur ℝ	b) n'est jamais de signe constant sur ℝ	c) est nécessairement positive sur ℝ	d) peut-être ou non de signe constant sur ℝ

Question 4
Pour tout réel x, e^{2x+1} est égal à :

a) $e^{2x}+x$	b) $e^{2x}\times e$	c) $(e^{x+1})^2$	d) (2x+1)×e

Question 5
Dans un repère orthonormé, la droite d d'équation cartésienne $2x-5y-4=0$

a) coupe l'axe des ordonnées au point de coordonnées (0;-4)	b) passe par le point de coordonnées (2;0.2)	c) admet $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-5\end{pmatrix}$ pour vecteur normal	d) admet $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\-5\end{pmatrix}$ pour vecteur directeur

CORRECTION

Question 1 Réponse : a

Preuve non demandée

a, b et R sont des nombres réels et $R>0$.

$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ est une équation cartésienne du cercle de centre K(a;b) et de rayon R.

$(x+1)^2+(y-1)^2=9=3^2$ et une équation cartésienne du cercle de centre K(-1;1) et de rayon 3.

Question 2 Réponse : d

Preuve non demandée

Pour tout nombre réel a, $P(x)=a(x-1)(x-3)$ est une fonction polynôme du second degré qui s'annule pour 1 et 3.

Question 3 Réponse : d

Preuve non demandée

$P(x)=ax^2+bx+c$ et $a\neq 0$ et $\Delta=b^2-4ac$

. Si $\Delta<0$ et $a>0$ alors pour tout nombre réel x $P(x)>0$.
. Si $\Delta<0$ et $a<0$ alors pour tout nombre réel x $P(x)<0$.
. Si $\Delta>0$ et $a>0$ alors, soient $x_1<x_2$ les deux racines du polynôme, pour $x\in]x_1;x_2[$ on a $P(x)<0$ et pour $x\in]-\infty;x_1[$ ou $x\in]x_2;+\infty[$ on a $P(x)>0$.
. Si $\Delta>0$ et $a<0$ alors, soient $x_1<x_2$ les deux racines du polynôme, pour $x\in]x_1;x_2[$ on a $P(x)>0$ et pour $x\in]-\infty;x_1[$ ou $x\in]x_2;+\infty[$ on a $P(x)<0$.
. Si $\Delta=0$ alors pour tout nombre réel x on a $P(x)\geqslant 0$ ou $P(x)\leqslant 0$.

Question 4 Réponse : b

Preuve non demandée

$e^{2x+1}=e^{2x}\times e^1=e^{2x}\times e$

Question 5 Réponse : c

Preuve non demandée

Pour toute droite D d'équation : $ax+by+c=0$ avec $a^2+b^2\neq 0$ le vecteur $\vec{N}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à D.

Donc le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-5\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à la droite d d'équation : $2x-5y-4=0$.

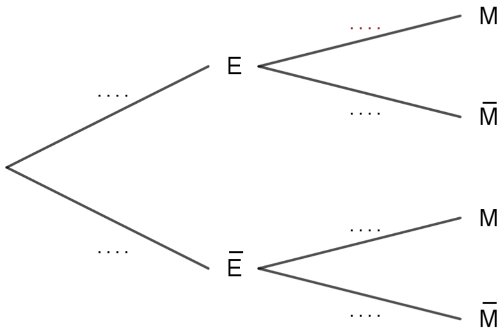
EXERCICE 2 (5 points)

Le principe d'un Escape Game est le suivant : une équipe de participants est enfermée à l'intérieur d'une salle à thème et doit réussir à en sortir en moins d'une heure (on parle de partie réussie). Au delà d'une heure, les participants sont libérés et la partie est perdue.
Un exploitant d'Escape Game propose à ses participants deux parties à la suite : la première partie se déroule dans la salle à thème « Espion », la seconde partie se déroule dans la salle à thème « Musée ».

Il dispose des données suivantes :
- lorsqu'une équipe joue dans la salle à thème « Espion », la probabilité qu'elle réussisse sa partie « Espion » est égale à 0,5.
- lorsqu'une équipe a réussi sa partie « Espion », la probabilité qu'elle réussisse sa partie « Musée » est égale à 0,6.
- lorsqu'une équipe n'a pas réussi sa partie « Espion », la probabilité qu'elle réussisse sa partie « Musée » est égale à 0,45.

Une équipe est choisie au hasard.
On note les événements suivants :
- E : « l'équipe réussit la partie « Espion » » ;
- M : « l'équipe réussit la partie « Musée » ».

1. Sur la copie, recopier et compléter, l'arbre de probabilités suivant :



2. Déterminer la probabilité que l'équipe réussisse les deux parties.

3. Montrer que la probabilité que l'équipe réussisse la partie « Musée » est égale à 0,525.

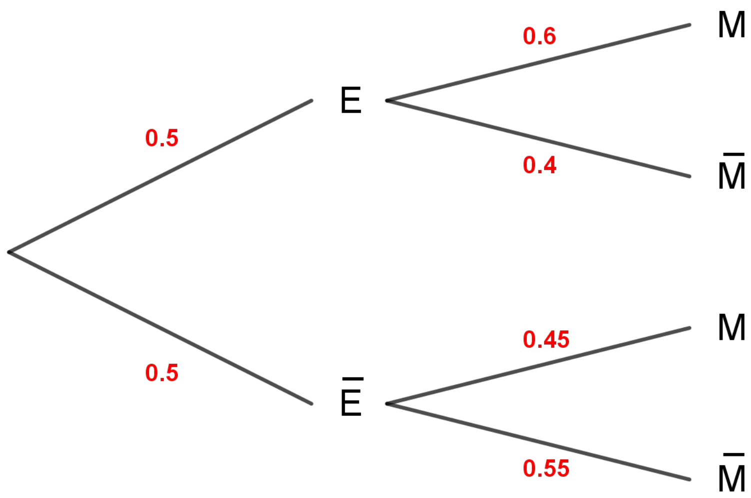
4. Quelle est la probabilité qu'une équipe échoue à la partie « Espion » sachant qu'elle a réussi la partie « Musée » ? On donnera la réponse arrondie à 10^{-2}.

5. Pour chacune des deux parties qui sont gagnées, une équipe reçoit 2€ de réduction pour une prochaine visite. Elle peut donc recevoir ; 0, 2 ou 4€ de réduction.
Si un très grand nombre d'équipes jouent les deux parties, quel est le montant moyen de la réduction obtenue à la fin des deux parties ?
Expliquer la démarche.

CORRECTION

1. L'énoncé précise :

- lorsqu'une équipe joue dans la salle à thème « Espion », la probabilité qu'elle réussisse sa partie « Espion » est égale à 0,5.
  Donc $P(E)=0{,}5$ et $P(\bar{E})=1-P(E)=1-0{,}5=0{,}5$
- lorsqu'une équipe a réussi sa partie « Espion », la probabilité qu'elle réussisse sa partie « Musée » est égale à 0,6.
  Donc $P_E(M)=0{,}6$ et $P_E(\bar{M})=1-P_E(M)=1-0{,}6=0{,}4$
- lorsqu'une équipe n'a pas réussi sa partie « Espion », la probabilité qu'elle réussisse sa partie « Musée » est égale à 0,45.
  Donc $P_{\bar{E}}(M)=0{,}45$ et $P_{\bar{E}}(\bar{M})=1-P_{\bar{E}}(M)=1-0{,}45=0{,}55$
- on obtient pour arbre de probabilités :



2. $P(E\cap M)=P(E)\times P_E(M)=0{,}5\times 0{,}6=0{,}3$

3. En utilisant la formule des probabilités totales

$P(M)=P(E\cap M)+P(\bar{E}\cap M)$

$P(\bar{E}\cap M)=P(\bar{E})\times P_{\bar{E}}(M)=0{,}5\times 0{,}45=0{,}225$

$P(M)=0{,}3+0{,}225=0{,}525$

4. On nous demande de calculer : $P_M(\bar{E})$

$P_M(\bar{E})=\dfrac{P(\bar{E}\cap M)}{P(M)}=\dfrac{0{,}225}{0{,}525}=\dfrac{3}{7}=0{,}43$ arrondi à 10^{-2}.

5. On appelle X la variable aléatoire égale au montant (en euro) de la réduction pour une prochaine visite de l'équipe.

X prend les valeurs ; 0 ; 2 et 4.

$P(X=0)=P(\bar{E}\cap \bar{M})=P(\bar{E})\times P_{\bar{E}}(\bar{M})=0{,}5\times 0{,}55=0{,}275$

$P(X=4)=P(E\cap M)=0{,}3$

$P(X=2)=1-P(X=0)-P(X=4)=1-0{,}275-0{,}3=0{,}425$

ou $P(X=2)=P(E\cap\bar{M})+P(\bar{E}\cap M)=0{,}5\times 0{,}4+0{,}5\times 0{,}45=0{,}2+0{,}225=0{,}425$

$E(X)=0\times 0{,}275+2\times 0{,}425+4\times 0{,}3=0{,}85+1{,}2=2{,}05$.

L'espérance mathématique de X est le montant moyen (en euro) de la réduction pour une prochaine visite pour un très grand nombre d'équipes jouant deux parties.

Ce montant moyen est égal à 2,05 €.

EXERCICE 3 (5 points)

En France métropolitaine, 2018 a été l'année la plus chaude d'après les relevés météorologiques. La température moyenne y a été de 14°C, elle a dépassé de 1,4° la température normale de référence calculée sur la période 1981-2010 (Source : site météo France).

1. Pour modéliser la situation, on considère l'année 2018 comme année zèro et on suppose que cette hausse moyenne de 1,4°C par an se poursuit chaque année. Pour tout entier naturel n, on note T_n la température moyenne annuelle en France pour l'année $2018+n$.

1.a. Quelle est la nature de la suite (T_n) ainsi définie ? On donnera son premier terme et sa raison.

1.b. On considère qu'au-delà d'une température moyenne de 35°C, les corps ne se refroidissent pas et il devient insupportable pour les humains de continuer à habiter cette région que l'on qualifie d'inhabitable. Selon le modèle considéré en quelle année la France deviendra-t-elle inhabitable pour les humains ? Justifier.

2. À cause de réchauffement climatique, certains régions risquent de connaître une baisse de 10 % par an des précipitations moyennes annuelles mesurées en millimètres (mm).
Dans une région du nord de la France, les précipitations moyennes annuelles étaient de 673 mm en 2018.
On considère l'année 2018 comme l'année zéro et on suppose que cette baisse de 10 % se poursuit chaque année. Pour tout entier naturel n, on note P_n les précipitations moyennes annuelles dans cette région pour l'année $2018+n$.

2.a. Quelle est la nature de la suite (P_n) ainsi définie ? On donnera son premier terme et sa raison.

2.b. Pour tout entier naturel n, exprimer P_n en fonction de n.

2.c. On donne le programme Python suivant :

```
def precipitations(J):
  I=673
  n=0
  while I>J:
    I=0.9*I
    n=n+1
  return n+2018
```

L'exécution de « precipitations(300) » renvoie la valeur 2026.
Que représente cette valeur pour le problème posé ?

CORRECTION

1.a. On suppose que la hausse moyenne de 1,4°C par an se poursuit chaque année.
Donc Pour tout entier naturel n : $T_{n+1}=T_n+1,4$.
(T_n) est la suite arithmétique de premier terme $T_0=14$ et de raison $r=1,4$.

1.b. Pour tout entier naturel n :
$T_n=T_0+nr=14+1,4n$.
On détermine n tel que $T_n \geqslant 35$.

$$T_n \geqslant 35 \quad \Leftrightarrow \quad 14+1,4n \geqslant 35 \quad \Leftrightarrow \quad 1,4n \geqslant 21 \quad \Leftrightarrow \quad n \geqslant \frac{21}{1,4}=\frac{210}{14}=15 .$$

La France deviendra inhabitable en 2018 + 15 = 2033 .

2.a. On suppose que la baisse de 10 % se poursuit chaque année.
Donc pour tout entier naturel n :

$$P_{n+\{1\}}=P_n-\frac{10}{100}\times P_n=(1-0,1)\times P_n=0,9\,P_n$$

(P_n) est la suite géométrique de premier terme $P_0=673$ et de raison $q=0,9$.

2.b. Pour tout entier naturel n :
$P_n=P_0\times q^n=673\times 0,9^n$

2.c. Pour obtenir l'exécution du programme il suffit d'ajouter une huitième ligne, commençant comme la première ligne :
print(precipitations(300))
La valeur renvoyée est : 2026.
2026 est la première année pour laquelle, dans la région du nord de la France considérée, les précipitations moyennes annuelles seront inférieures ou égales à 300 mm.

EXERCICE 4 (5 points)

Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par : $f(x)= -x^2 + 2x + 4$. Dans un plan muni d'un repère orthonormé, on note C_f sa courbe représentative.

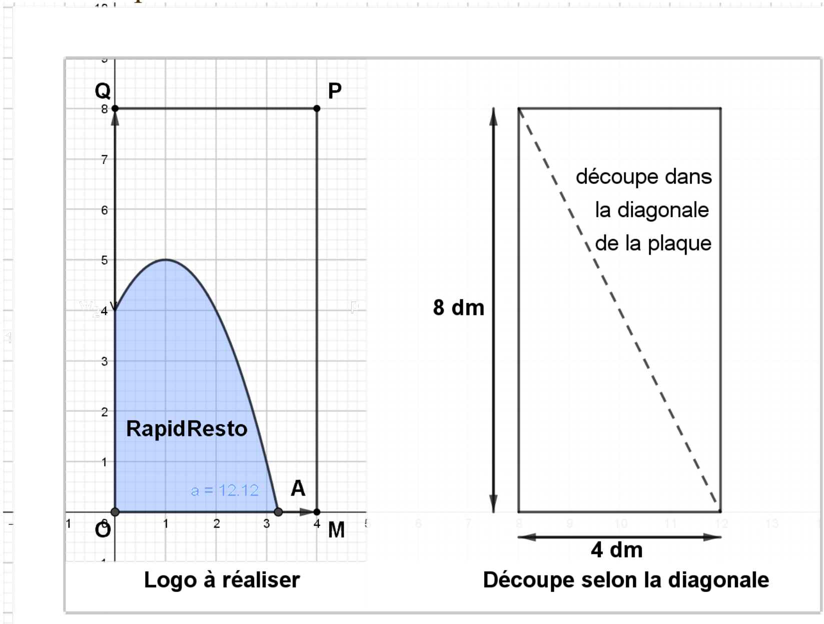
1. Déterminer les variations de f sur $[0;+\infty[$.

2. Déterminer la valeur exacte de l'abscisse du point A, intersection de la courbe C_f et de l'axe des abscisses puis en donner une valeur approchée à 10^{-2} près.

3. On note T la tangente à la courbe C_f au point d'abscisse 2.

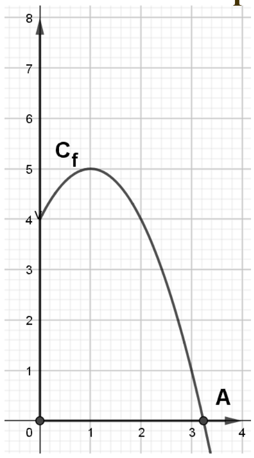
4. Tracer la droite T sur le graphique fourni en **annexe, qui est à rendre avec la copie.**

5. On admet que la courbe C_f est toujours en dessous de la droite T.
La société Logo reçoit une commande de l'entreprise RapidResto, qui lui demande de confectionner des logos dans des plaques rectangulaires de largeur 4 dm et de hauteur 8 dm selon le modèle ci-dessous. Le bord supérieur du logo est modélisé par la courbe C_f tracée dans le repère orthonormé figurant sur l'annexe dont l'unité graphique est le décimètre (dm).
Les figures ci-dessous ne sont pas à l'échelle.



Dans un souci d'économie, l'entreprise Logo espère pouvoir réaliser deux logos dans une seule plaque en la coupant dans sa diagonale. Est-ce possible ?
Justifier à l'aide des questions précédentes.

ANNEXE
à rendre avec la copie



CORRECTION

1. f est dérivable sur $[0;+\infty[$.

$f(x)=-x^2+2x+4$ donc $f'(x)=-2x+2$

$-2x+2=0 \Leftrightarrow -2x=-2 \Leftrightarrow x=1$

$-2x+2>0 \Leftrightarrow -2x>-2 \Leftrightarrow x<1$

$-2x+2<0 \Leftrightarrow -2x<-2 \Leftrightarrow x>1$

On donne les variations de f sous la forme d'un tableau

x	0		1		$+\infty$
f '(x)		+	0	–	
f(x)		↗	5	↘	

$f(1)=-1+2+4=5$

2. $f(x)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} -x^2+2x+4=0 \\ x\geqslant 0 \end{cases}$

$-x^2+2x+4=0$ $\Delta=2^2-4\times(-1)\times4=4+16=20>0$ $\sqrt{\Delta}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

$x_1=\dfrac{-2-2\sqrt{5}}{-2}=1+\sqrt{5}>0$ $x_2=\dfrac{-2+2\sqrt{5}}{-2}=1-\sqrt{5}<0$

Donc $f(x)=0 \Leftrightarrow x=x_1=1+\sqrt{5}$.

L'abscisse du point A, intersection de C_f et de l'axe des abscisses est $x_1=1+\sqrt{5}$.

En utilisant la calculatrice : $x_1=1+\sqrt{5}=3{,}24$ à 10^{-2} près.

3. $f(2)=-2^2+2\times2+4=4$ B(2;4).

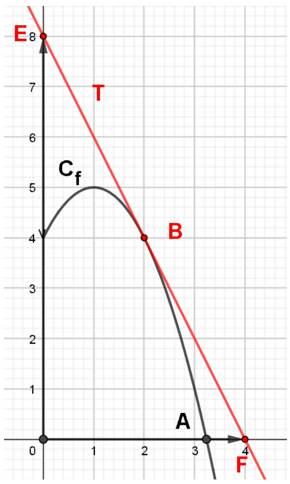
Le coefficient directeur de la tangente à C_f au point B est $f'(2)$.

$f'(2)=-2\times2+2=-2$

T : $y=-2x+b$ B(2;4) $4=-2\times2+b \Leftrightarrow b=8$

T : $y=-2x+8$

4. T passe par les points B(2;4) et E(0;8).



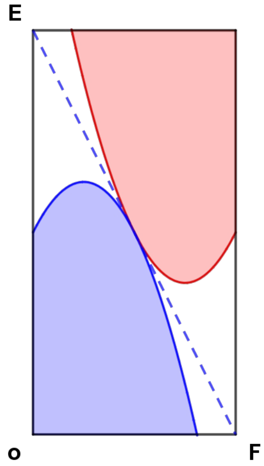
On remarque que T passe par le point F(0;4).

5. T est une diagonale de la plaque rectangulaire.

On admet que la courbe C_f est en dessous de la droite T.

Donc il suffit du triangle OEF (moitié du rectangle) pour construire le logo.

On peut donc construire un deuxième logo dans l'autre moitié du rectangle.


E
O
F