Sujet 26

EXERCICE 1 (5 points)

Cet exercice est un QCM et comprend cinq questions.
Pour chacune des questions, une seule des quatre réponses proposées est correcte.
Les questions sont indépendantes.
Pour chaque question, indiquer le numéro de la question et recopier la lettre correspondant à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée, mais il peut être nécessaire d'effectuer des recherches au brouillon pour aider à déterminer votre réponse.
Chaque réponse correcte rapporte un point. Une réponse incorrecte ou une question sans réponse n'apporte ni ne retire aucun point.

Question 1

Pour tout réel x, $\frac{e^{2x}}{e^{x+1}}$ est égale à :

a) e^{x-1}	b) e^{3x+1}	c) $\frac{2x}{x+1}$	d) e

Question 2

Dans le plan muni d'un repère, les courbes représentatives des fonctions
$x \rightarrow 15x^2+10x-1$ et $x \rightarrow 19x^2-22x+10$:

a) aucun point d'intersection	b) un seul point d'intersection	c) deux points d'intersection	d) quatre points d'intersection

Question 3

Le plan est rapporté à un repère orthonormé. Le cercle de centre A de coordonnées (3 ;-1) et de rayon 5 a pour équation cartésienne :

a) $(x+3)^2+(y-1)^2=25$	b) $(x-3)^2+(y+1)^2=5$
c) $(x+3)^2+(y-1)^2=5$	d) $(x-3)^2+(y+1)^2=25$

Question 4

Dans un repère orthonormé, la droite d d'équation cartésienne $3x+2y+4=0$ admet un vecteur normal de coordonnées.

a) $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$	b) $\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$	c) $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$	d) $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Question 5

Le plus petit entier naturel n tel que la somme $1+2+\ldots+n$ soit supérieure à 5000 est égal à :

a) 1000	b) 500	c) 200	d) 100

CORRECTION

Question 1 Réponse : a

Preuve non demandée

$e^{2x} \times e^{x+1} = e^{2x-(x+1)} = e^{x-1}$.

Question 2 Réponse : c

Preuve non demandée

Pour déterminer le nombre de points d'intersection des deux courbes représentatives, il suffit de déterminer le nombre de solutions de l'équation aux abscisses.

$19x^2 - 22x + 10 = 15x^2 + 10x - 1 \quad \Leftrightarrow \quad 4x^2 - 32x + 11 = 0$

$\Delta = (-32)^2 - 4 \times 4 \times 11 = 1024 - 176 = 848 > 0$.

L'équation aux abscisses admet deux solutions et les courbes courbes représentatives des fonctions données ont 2 points d'intersection.

Question 3 Réponse : d

Preuve non demandée

Une équation cartésienne du cercle de centre A(a;b) et de rayon R est : $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$

Pour l'exemple a=3, b=-1 et R=5 donc $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 25$.

Question 4 Réponse : c

Preuve non demandée

Si $d: ax + by + c = 0$ et $a^2 + b^2 \neq 0$ alors $\vec{N}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à d.

Pour $d: 3x + 2y + 4 = 0$ on a $\vec{N}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à d.

Question 5 Réponse : d

Preuve non demandée

$S = 1 + 2 + \ldots + n$ est la somme des n premiers termes de la suite arithmétique de premier t erme $u_1 = 1$ et de raison $r = 1$.

$S = u_1 + u_2 + \ldots + u_n = \frac{(u_1 + u_n) \times n}{2} = \frac{(1+n) \times n}{2}$

$S > 5000 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(1+n) \times n}{2} > 5000 \quad \Leftrightarrow \quad (1+n) \times n > 2 \times 5000 \quad \Leftrightarrow \quad n^2 + n - 10000 > 0$

On considère le trinôme : $T(x) = x^2 + x - 10000$

$\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times (-10000) = 40001$

$x_1 = \frac{-1 - \sqrt{40001}}{2 \times 1} = -100{,}5$ (arrondi au centième) $\qquad x_2 = \frac{-1 + \sqrt{40001}}{2 \times 1} = 99{,}5$ (arrondi au centième)

$T(x) \leqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in [x_1 ; x_2]$ et $T(x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in]-\infty ; x_1[\cup]x_2 ; +\infty[$

n est un entier naturel

$T(n) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad n \geqslant 100$

Le plus petit entier naturel tel que S > 5000 est 100.

EXERCICE 2

On considère la fonction dérivable f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=8x^3-6x^2-2$.
On note f' la fonction dérivée de la fonction f.
Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal.

1.a. Justifier que pour tout réel x, $f(x)=(x-1)(8x^2+2x+2)$.

1.b. En déduire que la courbe $\mathscr{C}$ coupe l'axe des abscisses en un seul point A dont on donnera les coordonnées.

2.a. Justifier que pour tout réel x, $f'(x)=12x(2x-1)$.

2.b. En déduire le tableau de variation de la fonction f.

3. Le point B de coordonnées $\left(0;-\frac{5}{2}\right)$ appartient-il à la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point D d'abscisse $x=\frac{1}{2}$?
Justifier.

CORRECTION

1.a. Pour tout nombre réel x, en développant on obtient :
$(x-1)(8x^2+2x+2)=8x^3+2x^2+2x-8x^2-2x-2=8x^3-6x^2-2=f(x)$

1.b. $f(x)=0 \Leftrightarrow (x-1)(8x^2+2x+2)=0 \Leftrightarrow (x-1=0 \text{ ou } 8x^2+2x+2=0)$
- $x-1=0 \Leftrightarrow x=1$
- $8x^2+2x+2=0$ $\Delta=2^2-4\times8\times2=4-64=-60<0$ cette équation n'admet pas de solution.

Donc $f(x)=0 \Leftrightarrow x=1$
L'abscisse, d'un point d'intersection de $\mathscr{C}$ et de l'axe des abscisses, est une solution de l'équation $f(x)=0$.
Donc l'unique point d'intersection de $\mathscr{C}$ et l'axe des abscisses est le point A(1;0).

2.a. f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
$f(x)=8x^3-6x^2-2$
$f'(x)=8\times(3x^2)-6\times(2x)=24x^2-12x=12x(2x-1)$

2.b. $f'(x)=0 \Leftrightarrow (12x=0 \text{ ou } 2x-1=0) \Leftrightarrow \left(x=0 \text{ ou } x=\frac{1}{2}\right)$
$f'(x)$ est un trinôme dont le coefficient de x^2 est positif.
$f'(x)<0 \Leftrightarrow x\in[0;\frac{1}{2}]$
Tableau de variation de f

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
f '(x)		+	0	−	0	+	
f(x)		↗	0	↘	$-\frac{5}{2}$	↗	

$f(0)=-2$ $f\left(\frac{1}{2}\right)=8\times\frac{1}{8}-6\times\frac{1}{4}-2=1-\frac{3}{2}-2=-\frac{5}{2}$

3. $f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{5}{2}$ $D\left(\frac{1}{2};-\frac{5}{2}\right)$

La tangente au point D à la courbe $\mathscr{C}$ a pour coefficient directeur $f'\left(\frac{1}{2}\right)=0$.

L'équation de cette tangente est $y=-\frac{5}{2}$.

Le point $B\left(0;-\frac{5}{2}\right)$ appartient à cette tangente.

EXERCICE 3

Un parfumeur propose l'un des ses parfums, appelé « Fleur Rose », et cela uniquement avec deux contenances de flacons : un de 30 ml ou un de 50 ml.
Pour l'achat d'un flacon « Fleur Rose », il propose une offre promotionnelle sur un autre parfum appelé « Bois d'ébène ».
On dispose des données suivantes :

. 58 % des clients achètent un flacon de parfum « Fleur Rose » de 30 ml et parmi ceux-là, 24 % achètent également un flacon de parfum « Bois d'ébène » ;
. 42 % des clients achètent un flacon de parfum « Fleur Rose » de 50 ml et parmi ceux-là, 13 % achètent également un flacon de parfum « Bois d'ébène ».

On admet qu'un client donné n'achète qu'un seul flacon « Fleur Rose » (soit en 30ml , soit en 50 ml) et s'il achète un flacon de parfum « Bois d'ébène », il n'en achète aussi un seul flacon.

On choisit au hasard un client achetant un flacon de parfum « Fleur Rose ».
On considère les événements suivants :

. F : « le client a acheté un flacon « Fleur Rose » de 30 ml » ;
. B : « le client a acheté un flacon « Bois d'ébène » ».

1. Construire un arbre pondéré traduisant les données de l'exercice.

2. Calculer la probabilité $P(F \cap B)$.

3. Calculer la probabilité que le client ait acheté un flacon « Bois d'ébène ».

4. Un flacon « Fleur Rose » de 30 ml est vendu 40€, un flacon « Fleur Rose » de 50 ml est vendu 60€ et un flacon « Bois d'ébène » est vendu 25€.
On note X la variable aléatoire correspondant au montant total des achats par un client du parfum « Fleur Rose ».

4.a. Déterminer la loi de probabilité de X.

4.b. Calculer l'espérance de X et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

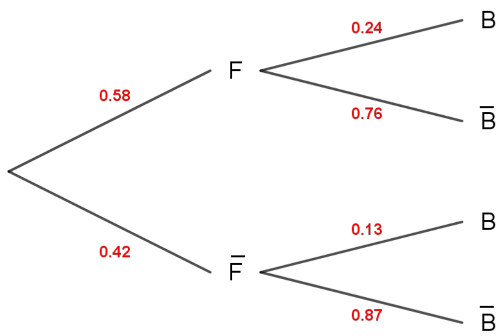
CORRECTION

1. L'énoncé précise :

. 58 % des clients achètent un flacon de parfum « Fleur Rose » de 30 ml et parmi ceux-là 24 % achètent également un flacon de parfum « Bois d'ébène ».
Donc : $P(F)=0,58$ et $P_F(B)=0,24$ et $P_F(\bar{B})=1-P_F(B)=1-0,24=0,76$

. $\bar{F}$ est l'événement : « le client a acheté un flacon de parfum « Fleur Rose » de 50 ml ».
42 % des clients achètent un flacon de parfum « Fleur Rose » de 50 ml et parmi ceux-là 13 % achètent également un flacon de parfum « Bois d'ébène ».
Donc : $P(\bar{F})=0,42$ et $P_{\bar{F}}(B)=0,13$ et $P_{\bar{F}}(\bar{B})=1-P_{\bar{F}}(B)=1-0,13=0,87$

. On obtient l'arbre pondéré :



2. $P(F\cap B)=P(F)\times P_F(B)=0,58\times 0,24=0,1392$

3. En utilisant l'arbre pondéré ou la formule des probabilités totales, on obtient :
$P(B)=P(F\cap B)+P(\bar{F}\cap B)=0,1392+P(\bar{F})\times P_{\bar{F}}(B)=0,1392+0,42\times 0,13=0,1392+0,0546=0,1938$.

4.a. Si le client choisi au hasard achète ;
. 1 flacon de « Fleur Rose » de 30 ml et un flacon de « Bois d'ébène » alors X prend la valeur $40+25=65$
. 1 flacon de « Fleur Rose » de 30 ml et n'achète pas « Bois d'ébène » alors X prend la valeur 40
. 1 flacon de « Fleur Rose » de 50 ml et un flacon de « Bois d'ébène » alors X prend la valeur $60+25=85$
. 1 flacon de « Fleur Rose » de 50 ml et n'achète pas « Bois d'ébène » alors X prend la valeur 60 .
L'univers image est $\mathcal{X}=\{40;60;65;85\}$/
On détermine la loi de probabilité de X.

$P(X=40)=P(F\cap\bar{B})=P(F)\times P_F(\bar{B})=0,58\times 0,76=0,4408$
$P(X=60)=P(\bar{F}\cap\bar{B})=P(\bar{F})\times P_{\bar{F}}(\bar{B})=0,42\times 0,87=0,3654$
$P(X=65)=P(F\cap B)=P(F)\times P_F(B)=0,58\times 0,24=0,1392$
$P(X=85)=P(\bar{F}\cap B)=P(\bar{F})\times P_{\bar{F}}(B)=0,42\times 0,13=0,0546$

On donne lésultat sous la forme d'un tableau.

x_i	40	60	65	85
$P(X=x_i)$	0.4408	0.3654	0.1392	0.0546

4.b. $E(X)=0,4408\times 40+0,3654\times 60+0,1392\times 65+0,0546\times 85=17,632+21,924+9,048+4,641=52,561$
La dépense moyenne d'un client est : 52,56 €.

EXERCICE 4

D'après l'ADEME (Agence De l'Environnement et de la Maîtrise de l'Energie), chaque français a produit une masse moyenne de 365 kg de déchets ménagers en 2018.
Un maire, étant informé que la masse moyenne de déchets ménagers dans la commune en 2018 était de 400 kg par habitant, décide d'une campagne annuelle de sensibilisation au recyclage qui contient à une réduction de cette production de 1,5 % par an, et cela dès l'année 2019.

On modélise alors la masse moyenne de déchets ménagers par habitant calculée en fin d'année dans cette par une suite (d_n) où pour tout entier naturel n, (d_n) correspond à la masse moyenne de ménagers par habitant, en kg pour l'année $2018+n$.
Ainsi, $d_0=400$.

1. Prouver que $d_1=394$. Interpréter ce résultat.

2.a. Déterminer la nature de la suite (d_n). Préciser sa raison et son premier terme.

2.b. Pour tout entier naturel n, exprimer d_n en fonction de n.

3.a. D'après le tableau de valeurs suivant, en quelle année la masse moyenne de déchets ménagers par habitant deviendra-t-elle inférieure à 365 kg ?

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
d_n	400	394	388.09	382.27	376.53	370.89	365.52	359.84	354.45

3.b. Écrire une fonction Python qui retourne l'année à laquelle la masse moyenne de déchets ménagers par habitant de la commune devient inférieure à 365 kg.

CORRECTION

1. La production moyenne de la masse de déchets ménagers par habitant est réduite de 1,5 % pendant l'année 2019.

Donc $d_1 = d_0 - \frac{1,5}{100} \times d_0 = 400 - 0,015 \times 400 = 400 - 6 = 394$.

La production moyenne de la masse de déchets par habitant pour l'année 2019 est égale à : 394 kg.

2.a. Il y a une réduction de la production moyenne de déchets ménagers par habitant de 1,5 % par an.

Donc $d_{n+1} = d_n - \frac{1,5}{100} \times d_n = (1 - 0,015) \times d_n = 0,985\, d_n$.

(d_n) est la suite géométrique de raison $q=0,985$ et de premier terme $d_0=400$.

2.b. Pour tout entier naturel n :

$d_n = d_0 \times q^n = 400 \times 0,985^n$.

3.a. Par lecture du tableau, $d_n < 365$ pour la première fois pour $n=7$.

En 2018+7=2025, la production moyenne de la masse de déchets par habitant deviendra inférieure à 365 kg.

3.b. On écrit la fonction Python : Annee().

```
def Annee():
  d=400
  n=0
  while>=365:
    d=d*0.985
    n=n+1
  return n+2018
print(Annee())
```

Remarque :

Ligne 7 on écrit « return n +2018 » et non « return n » pour que la fonction donne l'année demandée.

Si on exécute le programme on obtient: 2025.