Sujet 27

EXERCICE 1 (5 points)

Cet exercice est un QCM et comprend cinq questions.
Pour chacune des questions, une seule des quatre réponses proposées est correcte.
Les questions sont indépendantes.
Pour chaque question, indiquer le numéro de la question et recopier la lettre correspondant à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée, mais il peut être nécessaire d'effectuer des recherches au brouillon pour aider à déterminer votre réponse.
Chaque réponse correcte rapporte un point. Une réponse incorrecte ou une question sans réponse n'apporte ni ne retire aucun point.

Question 1

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=e^{100x}$. Alors :

a) g est croissante sur $\mathbb{R}$	b) g est décroissante sur $\mathbb{R}$	c) g change de sens de variation sur $\mathbb{R}$	d) aucune des propositions a,b et c n'est correcte

Question 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=100x^2+10x+1$. Dans le plan muni d'un repère orthonormé, la courbe représentative de f est une parabole dont l'axe de symétrie a pour équation :

a) x=10	b) x=-10	c) x=0.05	d) x=-0.05

Question 3

Soit a et b les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $a(x)=3x^2+15x+1$ et $b(x)=25x^2+5x-100$.
Dans le plan muni d'un repère orthonormé les courbes représentatives des fonctions a et b ont :

a) 0 point d'intersection	b) 1 point d'intersection	c) 2 points d'intersection	d) 4 points d'intersection

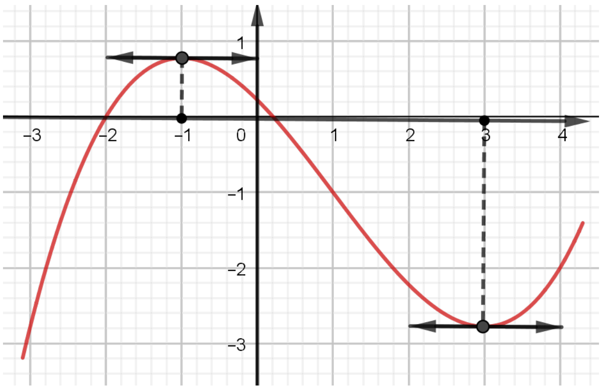
Question 4

La somme $1+5+5^2++\ldots+5^{10}$ est égale à :

a) 2441406	b) 271	c) 5^{55}	d) 12207031

Question 5

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ dont la représentation graphique $\mathscr{C}_f$ est donnée ci-dessous.
On sait de plus que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet deux tangentes horizontales : une au point d'abscisse -1 et l'autre au point d'abscisse 3.



Alors le réel $f'(-1)\times f'(3)$

a) strictement positif	**b) strictement négatif**	**c) égal à 0**	**d) égal à f '(-3)**

CORRECTION

Question 1 Réponse : a

Preuve non demandée

$g(x)=e^{100x}$ $g'(x)=100e^{100x}>0$

donc g est croissante sur $\mathbb{R}$.

Question 2 Réponse : d

Preuve non demandée

On détermine la forme canonique de f(x).

$$f(x)=100x^2+10x+1=100\left(x^2+\frac{1}{10}x\right)+1=100(x^2+0{,}1x)+1=100\left[\left(x+\frac{0{,}1}{2}\right)^2-\left(\frac{0{,}1}{2}\right)^2\right]+1$$

$$f(x)=100[(x+0{,}05)^2-0{,}05^2]+1=100(x+0{,}05)^2-100\times0{,}0025+1$$

$$f(x)=100(x+0{,}05)^2+0{,}75$$

Le sommet de la parabole est le point S(-0,05;0,75) et l'axe de la parabole a pour équation x=-0,05.

Question 3 Réponse : c

Preuve non demandée

Pour déterminer le nombre de points d'intersection entre les courbes représentatives des fonctions a et b, on détermine le nombre de solutions de l'équation aux abscisses : $b(x)=a(x)$.

$b(x)=a(x) \Leftrightarrow 25x^2+5x-100=3x^2+15x+1 \Leftrightarrow 22x^2-10x-99=0$

$\Delta=(-10)^2-4\times(-99)\times22>0$ donc l'équation admet 2 solutions distinctes et les courbes deux points d'intersection.

Question 4 Réponse : d

Preuve non demandée

$S=1+5+52+\ldots+5^{10}$ S est la somme des 11 premiers termes de la suite géométrique (u_n) de premier terme $u_0=1$ et de raison $q=5$.

$5\times S=5+5^2+5^3+\ldots+5^{11}$

$5\times S-S=5^{11}-1 \Leftrightarrow 4\times S=5^{11}-1 \Leftrightarrow S=\dfrac{5^{11}-1}{4}$

En utilisant la calculatrice, on obtient : $S=12207031$.

Question 5 Réponse : c

Preuve non demandée

La courbe $\mathscr{C}_f$ admet 2 tangentes horizontales aux points d'abscisses -1 et 3 donc :

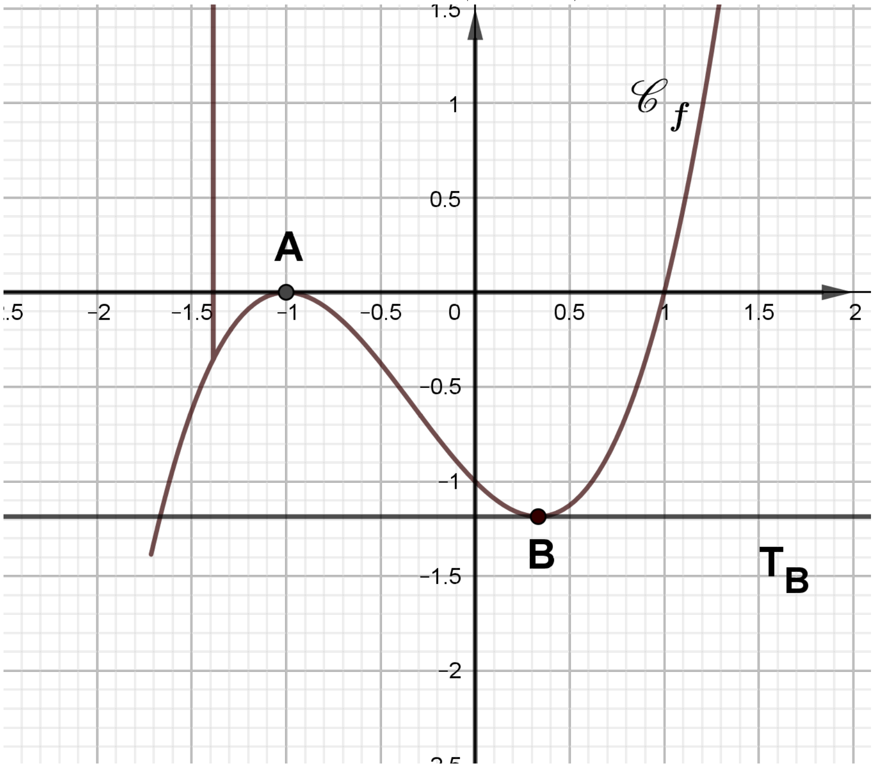
$f'(-1)=0$ et $f'(3)=0$ et $f'(-1)\times f'(3)=0$

EXERCICE 2 (5 points)

Dans le plan muni d'un repère, on a tracé la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On note f' la dérivée de f. On sait que $\mathscr{C}_f$ admet exactement deux tangentes horizontales :

. l'axe des abscisses comme tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point $A(-1;0)$;

. la droite T_B comme tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point $B\left(\frac{1}{3};-\frac{32}{27}\right)$.



1. Par lecture graphique, donner les solutions de l'équation $f(x)=0$.

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3+x^2-x-1$.
On note f' la fonction dérivée de f.

2. Déterminer $f'(x)$ pour tout réel x.

3. En déduire le tableau de variation de f.

4. En utilisant ce qui précède, déterminer la position relative de la courbe de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=x^3+x^2$ et de la droite d'équation $y=x+1$.

CORRECTION

1. A(-1;0) et C(1;0) sont les points communs à $\mathscr{C}_f$ et l'axe des abscisses.
L'ensemble des solutions de l'équation : $f(x)=0$ est $\mathscr{S}=\{-1;1\}$.

2. $f(x)=x^3+x^2-x-1$
$f'(x)=3x^2+2x-1$

3. $\Delta=2^2-4\times3\times(-1)=4+12=16=4^2$

$x_1=-2+4/2\times3=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ $\qquad x_2=\frac{-2-4}{2\times3}=-\frac{6}{5}=-1$

Le coefficient de x^2 est strictement positif, donc :

Si $-1<x<\frac{1}{3}$ alors $f'(x)<0$

Si $x<-1$ ou $x>\frac{1}{3}$ alors $f'(x)>0$

Tableau de variation de f

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
f '(x)		+	0	−	0	+	
f(x)		↗	0	↘	$-\frac{32}{27}$	↗	

4. M(x;g(x)) N(x;x+1) $\overrightarrow{NM}\begin{pmatrix}0\\ x^3+x^2-x-1\end{pmatrix}$.

M est au dessus de N si et seulement si $x^3+x^2-x-1>0$.

La courbe représentative de f est en dessous de l'axe des abscisses pour $x\leqslant\frac{1}{3}$ et strictement au dessus pour $x>\frac{1}{3}$ donc :

si $x\leqslant\frac{1}{3}$ alors $x^3+x^2-x-1\leqslant0$

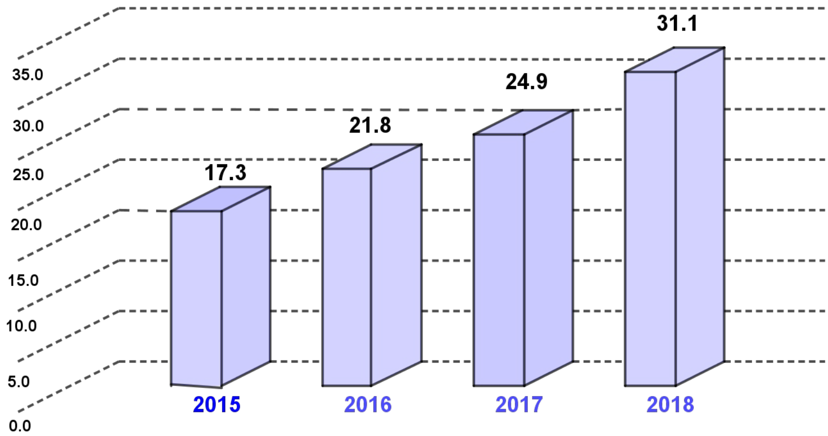
si $x>\frac{1}{3}$ alors $x^3+x^2-x-1>0$

Conséquence :

$\mathscr{C}_g$ est en dessous de la droite d'équation y=x+1 pour $x\leqslant\frac{1}{3}$ et au dessus pour $x>\frac{1}{3}$.

EXERCICE 3 (5 points)

Dans cet exercice et si cela est nécessaire, les résultats seront arrondis à 0,1.
Le graphique ci-dessous illustre le nombre (en milliers) de voitures électriques immatriculées en France entre 2015 et 2018.



1. On cherche à modéliser l'évolution du nombre (en milliers) de voitures électriques immatriculées en France à compter de l'année 2015 à l'aide d'une suite. On hésite encore entre deux modèles :

- **premier modèle :**
On fait l'hypothèse que ce nombre augmente de 21 % par an. On déduit alors une suite (u_n) où selon ce modèle, u_n est le nombre (en milliers) de voitures électriques immatriculées en France l'année 2015+n avec $n \in \mathbb{N}$. Ainsi $u_0=17{,}3$.
- **second modèle :**
On définit la suite (v_n) par $v_0=17{,}3$ et pour tout entier naturel n, $v_{n+1}=0{,}7v_n+10$. D'après ce modèle et pour tout entier naturel n, v_n est le nombre (en milliers) de voitures électriques immatriculées en France l'année 2015+n.

1.a. Donner les valeurs u_1, u_2, u_3, v_1, v_2 et v_3.
1.b. Des deux modèles lequel apparaît le mieux adapté pour modéliser à l'aide d'une suite suite l'évolution du nombre de voitures électriques immatriculées en France à compter de l'année 2015 donnée par le graphique ? Argumenter.

2. Dans ce qui suit on choisit de modéliser le nombre de voitures immatriculées en France à compter de l'année 2015 à l'aide de la suite (u_n) définie dans la question 1.

2.a. Donner la nature de la suite (u_n) et préciser sa raison.
2.b. Pour tout entier naturel n, exprimer u_n en fonction de n.
2.c. On considère l'algorithme en langage Python ci-dessous :

```
u=17.3
n=0
while u<50:
   u=1.21*u
   n=n+1
```

Quelle la valeur de la variable n à la fin de l'exécution de l'algorithme ?
Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

CORRECTION

1.a. $u_1=u_0+\frac{21}{100}\times u_0=(1+0{,}21)\times u_0=1{,}21\times 17{,}3=20{,}9$ (arrondi au dixième).

$u_2=u_1+0{,}21\times u_1=1{,}21\times 20{,}9=25{,}3$
$u_3=u_2+0{,}21\times u_2=1{,}21\times 25{,}3=30{,}6$
$v_1=0{,}7\times v_0+10=0{,}7\times 17{,}3+10=22{,}1$
$v_2=0{,}7\times v_1+10=0{,}7\times 22{,}1+10=25{,}5$
$v_3=0{,}7\times v_2+10=0{,}7\times 25{,}5+10=29{,}5$

1.b. $u_1=20{,}9$ $\qquad v_1=22{,}1$
La valeur donnée par le graphique : **21,8.**
$21{,}8-20{,}9=0{,}9$ $\qquad 22{,}1=21{,}8=0{,}3$
v_1 est plus proche de 21,8.
$u_2=25{,}3$ $\qquad v_2=25{,}5$
La valeur donnée par le graphique : **24,9**
$25{,}3-24{,}9=0{,}4$ $\qquad 25{,}5-24{,}9=0{,}6$
u_2 est plus proche de 24,9.
$u_3=30{,}6$ $\qquad v_3=29{,}5$
La valeur donnée par le graphique : **31,1**
$31{,}1-30{,}6=0{,}5$ $\qquad 31{,}6-29{,}5=2{,}1$
v_3 est beaucoup plus éloigné de 31,1.
On peut penser que (u_n) est plus adapté pour modéliser l'évolution demandée.

2.a. Pour tout entier naturel n :
$u_{n+1}=u_n+\frac{21}{100}\times u_n=(1+0{,}21)\times u_n=1{,}21\times u_n$.
Donc : (u_n) est la suite géométrique de premier terme $u_0=17{,}3$ et de raison $q=1{,}21$.

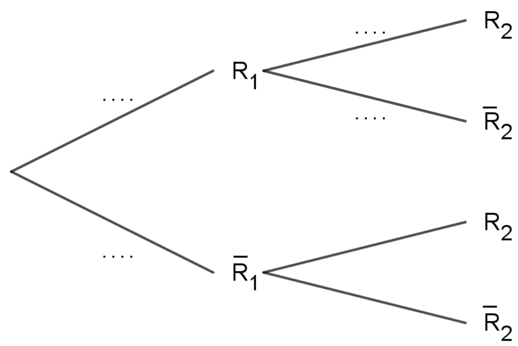
2.b. Pour tout entier naturel n :
$u_n=u_0\times q^n=17{,}3\times 1{,}21^n$.

2.c. Si on exécute le programme Python, on obtient $n=6$.
$u_6=17{,}3\times 1{,}21^6=54{,}3$
$u_5=17{,}3\times 1{,}21^5=44{,}9$
$2015+6=2021$ sera la première année où le nombre de voitures électriques immatriculées en France sera supérieur à 50000.
L'estimation donnée par la suite (u_n), en 2021 il y aura 54300 immatriculations de voitures électriques en France.

EXERCICE 4 (5 points)

Un jeu est organisé à partir d'un sac contenant 6 jetons rouges et 4 jetons noirs. Les jetons sont indiscernables au toucher.
Un joueur tire au deux jetons au hasard dans le sac selon le déroulé suivant :
. le joueur prend un premier jeton au hasard dans le sac et il met le jeton de côté ;
. le joueur prend un second jeton au hasard dans le sac et il met le jeton de côté.
On note :
. R_1 l'événement « le premier jeton tiré est de couleur rouge » ;
. R_2 l'événement « le second jeton tiré est de couleur rouge ».

1. Recopier sur la copie et compléter l'arbre ci-dessous :



2. On considère l'événement A : « le joueur obtient deux jetons rouges ».

2.a. Déterminer la probabilité $P(A)$.

2.b. Décrire l'événement contraire de l'événement A par une phrase de la forme :
« le joueur obtient . . . . ».

3. Montrer que la probabilité que le second jeton tiré sont de couleur rouge est égale à 0,6.

4. Le second jeton tiré est de couleur noire.
Que peut-on alors penser de l'affirmation suivante : « il y a plus de 50 % de chance que le premier jeton tiré ait été de couleur rouge » ?
Justifier la réponse.

CORRECTION

1. Pour le premier tirage il y a 10 jetons dans le sac, 6 rouges et 4 noirs.

$P(R_1)=\frac{6}{10}=0{,}6 \qquad P(\bar{R}_1)=\frac{4}{10}=0{,}4$.

Pour le second tirage il y a 9 jetons dans le sac.

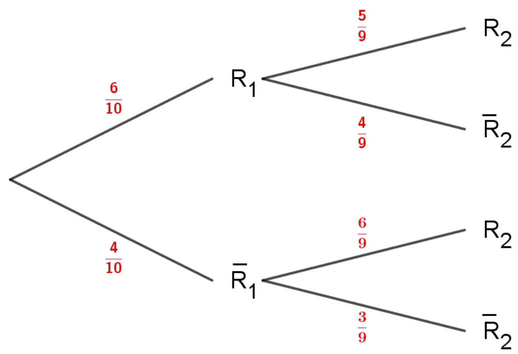
. Si le joueur a tiré un jeton rouge au premier tirage, il y a 5 jetons rouges et 4 jetons noirs dans le sac.

$P_{R_1}(R_2)=\frac{5}{9} \qquad P_{R_1}(\bar{R}_2)=\frac{4}{9}$

. Si le joueur a tiré un jeton noir au premier tirage, il y a 6 jetons rouges et 3 jetons noirs dans le sac.

$P_{\bar{R}_1}(R_2)=\frac{6}{9}=\frac{2}{3} \qquad P_{\bar{R}_1}(\bar{R}_2)=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$

On obtient l'arbre pondéré



2.a. $A=R_1\cap R_2$

$P(R_1\cap R_2)=P(R_1)\times P_{R_1}(R_2)=\frac{6}{10}\times\frac{5}{9}=\frac{30}{90}=\frac{1}{3} \qquad P(A)=\frac{1}{3}$

2.b. « le joueur obtient au moins un jeton noir parmi les deux jetons tirés »

3. En utilisant la formule des probabilités totales :

$P(R_2)=P(R_1\cap R_2)+P(\bar{R}_1\cap R_2)=\frac{1}{3}+P(\bar{R}_1)\times P_{\bar{R}_1}(R_2)=\frac{1}{3}+\frac{4}{10}\times\frac{6}{9}=\frac{1}{3}+\frac{24}{90}=\frac{54}{90}=\frac{6}{10}=0{,}6$

$P(R_2)=0{,}6$

4. $P_{\bar{R}_2}(R_1)=\frac{P(R_1\cap\bar{R}_2)}{P(\bar{R}_2)}$

$P(\bar{R}_2)=1-06=0{,}4=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$

$P(R_1\cap\bar{R}_2)=P(R_1)\times P_{R_1}(\bar{R}_2)=0{,}6\times\frac{4}{9}=\frac{24}{90}=\frac{4}{15}$

$P_{\bar{R}_2}(R_1)=\frac{4}{15}\times\frac{5}{2}=\frac{2}{3}$

$\frac{2}{3}>0{,}50$ donc il y a donc plus de 50 % de chance que le premier jeton tiré ait été de couleur rouge si le second jeton tiré est de couleur noire.

L'affirmation est juste.