Sujet 28

EXERCICE 1 (5 points)

Cet exercice est un QCM et comprend cinq questions.
Pour chacune des questions, une seule des quatre réponses proposées est correcte.
Les questions sont indépendantes.
Pour chaque question, indiquer le numéro de la question et recopier la lettre correspondant à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée, mais il peut être nécessaire d'effectuer des recherches au brouillon pour aider à déterminer votre réponse.
Chaque réponse correcte rapporte un point. Une réponse incorrecte ou une question sans réponse n'apporte ni ne retire aucun point.

Le plan est muni d'un repère orthonormé

Question 1

La droite D de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$ passant par le point A(-1;2) a pour équation :

a) -3x+y-5=0	b) x+3y-5=0	c) x-3y-5=0	d) 3x+y+1=0

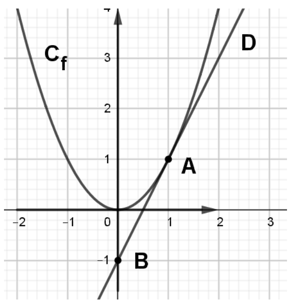
Question 2

On considère la droite d d'équation $5x-8y+9=0$. Alors :

a) A(6;7) appartient à d	b) $\vec{n}\begin{pmatrix}5\\8\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à d
c) d coupe l'axe des ordonnées au point B(0:1)	d) d est parallèle à la droite d'équation: 2.5x-4y+2=0

Question 3

On considère la fonction f dont la représentation graphique C_f est donnée ci-dessous.



La droite D est la tangente à C_f au point A(1;1). Le point B(0 ;-1) appartient à la droite D.
Le nombre dérivée de $f'(1)$ est égal à :

a) 1	b) $\frac{1}{2}$	c) 2	d) -2

Question 4

On considère une fonction f polynôme du second degré dont le tableau de signes est donné ci-après :

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
f(x)		$-$	0	$+$	0	$-$	

Une expression de f(x) peut-être :

a) $2x^2+5x-2$	b) $-x^2+1$	c) $-x^2+x+2$	d) x^2+x-2

Question 5

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x\mathrm{e}^x$.
Alors la fonction dérivée de f, notée f' est définie sur $\mathbb{R}$ par :

a) $f'(x)=e^x$	b) $f'(x)=(x+1)e^x$	c) $f'(x)=e$	d) $f'(x)=x^2e^x$

CORRECTION

Question 1 **Réponse : b**

Preuve non demandée

M(x;y) A(-1;2) $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x+1 \\ y-2 \end{pmatrix}$ $\vec{u}\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x+1 & -3 \\ y-2 & 1 \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow 1\times(x+1)+3\times(y-2)=0 \Leftrightarrow x+3y-5=0$

Question 2 **Réponse : d**

Preuve non demandée

d : $5x-8y+9=0$ $\vec{N}\begin{pmatrix} 5 \\ -8 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à d.

d_1 : $2{,}5x-4y+2=0$ $\vec{N}_1\begin{pmatrix} 2{,}5 \\ -4 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à d.

$\vec{N}=2\vec{N}_1$ donc les droites d et d_1 sont parallèles.

Question 3 **Réponse : c**

Preuve non demandée

$f'(1)$ est égal au coefficient directeur de la droite D=(AB).

$m=\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\dfrac{-1-1}{0-1}=\dfrac{-2}{-1}=2$

Question 4 **Réponse : c**

Preuve non demandée

On a $f(-1)=f(2)=0$ et le coefficient de x^2 négatif.

Donc $f(x)=-x^2+x+2$

Question 5 **Réponse : b**

Preuve non demandée

$(e^x)'=e^x$ $(u\times v)'=u'\times v+u\times v'$

$u(x)=x$ $u'(x)=1$

$v(x)=e^x$ $v'(x)=e^x$

$f'(x)=1\times e^x+x\,e^x=(x+1)e^x$

EXERCICE 2 (5 points)

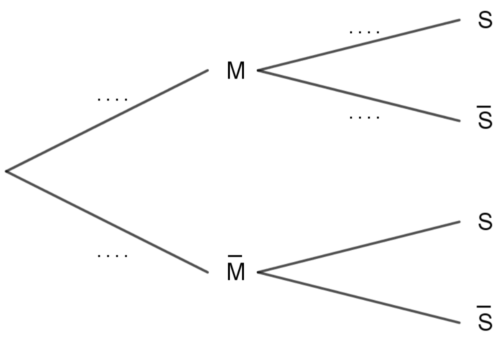
Dans un aéroport, les portiques de sécurité servent à détecter les objets métalliques que pourraient emporter certains voyageurs.
On choisit au hasard un voyageur franchissant un portique.

On note :
. S l'événement : « le voyageur fait sonner le portique ».
. M l'événement : « le voyageur porte un objet métallique ».

On considère qu'un voyageur sur 500, porte sur lui un objet métallique.

On remarque que :
. Lorsqu'un voyageur franchit le portique avec un objet métallique, la probabilité que le portique sonne est égale à $0{,}98$.
. Lorsqu'un voyageur franchit le portique sans objet métallique, la probabilité que le portique ne sonne pas est égale à $0{,}98$.

1. Recopier et compléter l'arbre de probabilités ci-dessous illustrant cette situation.



2. Montrer que $P(S)=0{,}02192$.

3. On suppose qu'à chaque fois un voyageur franchit le portique, la probabilité que ce portique sonne est égale à $0{,}02192$, et ce de façon indépendante des déclenchements de sonnerie lors des passages des des autres voyageurs.
Deux personnes passent successivement le portique de sécurité.
On note X la variable aléatoire donnant le nombre de fois où la portique sonne.

3.a. Justifier qu'on peut modéliser la loi de X par une loi binomiale $B(n;p)$ dont on précisera les paramètres n et p.

3.b. Reprendre et compléter le tableau donnant la loi de X.

k	0	1	2
P(X=k)			

3.c. Calculer et interpréter, l'espérance de X dans le contexte de l'exercice.

CORRECTION

1. L'énoncé précise :

. Un voyageur sur 500 porte un objet métallique donc :

$P(M)=\frac{1}{500}=0{,}002$ et $P(\bar{M})=1-P(M)=1-0{,}002=0{,}998$

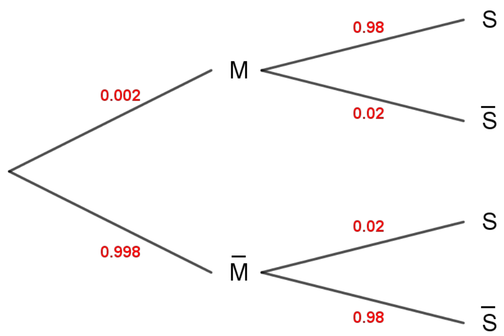
. Lorsqu'un voyageur franchit le portique avec un objet métallique, la probabilité que le portique sonne est égale à 0,98 donc :

$P_M(S)=0{,}98 \quad P_M(\bar{S})=1-P_M(S)=1-98=0{,}02$

. Lorsqu'un voyageur franchit le portique sans objet métallique, la probabilité que le portique ne sonne pas est égale à 0,98 donc :

$P_{\bar{M}}(\bar{S})=0{,}98 \quad P_{\bar{M}}(S)=1-P_{\bar{M}}(\bar{S})=1-0{,}98=0{,}02$.

. Arbre de probabilités



2. En utilisant l'arbre de probabilités ou la formule des probabilités totales.

$P(S)=P(M\cap S)=P(\bar{M}\cap S)=P(M)\times P_M(S)+P(\bar{M})\times P_{\bar{M}}(S)$

$P(S)=0{,}002\times 0{,}98+0{,}998\times 0{,}02=0{,}00196+0{,}01996=0{,}02192$.

3.a. Le nombre de voyageurs d'un aéroport étant très important, on peut supposer que les passages sous le portique sont indépendants.

On considère l'épreuve de Bernoulli suivante :

un voyageur choisi au hasard franchit le portique

le succès : S « le portique sonne » la probabilité de succès est : $P(S)=p=0{,}02192$

l'échec : $\bar{S}$ « le portique ne sonne pas » la probabilité de l'échec est : $P(\bar{S})=q=1-p=0{,}97808$.

On effectue 2 épreuves indépendantes, alors la loi de probabilité de la variable aléatoire X égale au nombre de succès en 2 épreuves est la loi binomiale de paramètres $n=2$ et $p=0{,}02192$.

C'est à dire pour k entier naturel compris entre 0 et 1 : $P(X=k)=\binom{2}{k}\ p^k q^{2-k}$.

$$P(X=0)=\binom{2}{0}\ p^0q^2=q^2=0{,}97808^2=0{,}9566404864$$

$$P(X=1)=\binom{2}{1}\ p^1q^1=2pq=0{,}04287900272$$

$$P(X=2)=\binom{2}{2}\ p^2q^0=p^2=0{,}0004804864$$

3.b.

k	0	1	2
P(X=k)	p^2	$2pq$	q^2

3.c. $E(X)=0\times q^2+1\times 2pq+2\times p^2=2p(p+q)=2p-1=2p=0{,}04384$

Pour 100000 passages de groupes de deux voyageurs, le portique sonnera en moyenne 4384 fois.

EXERCICE 3 (5 points)

En 2019, les déchets d'une entreprise sont évalués à 6000 tonnes.
Cette entreprise s'engage à réduire ses déchets de 5 % chaque année.

1. Avec cette politique, quelle quantité de déchets peut envisager l'entreprise en 2020 ?

2. Pour tout entier naturel n, on note d_n la quantité de déchets produits en tonnes par cette entreprise l'année 2019 + n. Avec cette notation, on a alors $d_0=6000$.

2.a. Exprimer d_{n+1} en fonction de d_n pour tout entier naturel n.

2.b. Quelle est la nature de la suite (d_n) ?

2.c. Déterminer la quantité totale de déchets produits par l'entreprise entre les années 2019 et 2023. On arrondira le résultat à la tonne près ?

3. L'entreprise souhaite savoir au bout de combien d'années d'application de cette politique de réduction des déchets, la quantité annuelle produite aura diminué de 40 % par rapport à la quantité produite en 2019. Recopier et compléter l'algorithme ci-dessous sur la copie afin qu'il permette de répondre à la question posée.

```
D ← 6000
N ← 0
Tant que D . . . . . . . . .
   D ←     . . . .
   N ←     N+1
Fin Tant que
```

CORRECTION

1. La réduction de la quantité de déchets pendant l'année 2020 sera : $\frac{5}{100}\times 6000=300$ t.

La quantité de déchets de l'année 2020 sera : $6000-300=5700\text{ t}$.

2.a. La réduction de la quantité de déchets pendant l'année 2019+(n+1) sera $\frac{5}{100}\times d_n$.

$$d_{n+1}=d_n-\frac{5}{100}\times d_n=d_n-0{,}05\,d_n=0{,}95\,d_n \text{ .}$$

2.b. Pour tout entier naturel n : $d_{n+1}=0{,}95d_n$

Donc (d_n) est la suite géométrique de premier $d_0=6000$ et de raison $q=0{,}95$.

2.c. Pour tout entier naturel n : $d_n=d_0\times q^n=6000\times 0{,}95^n$.

$S=d_1+d_2+d_3+d_4$ $\qquad 0{,}95\times S=d_1+d_2+d_3+d_4$

$(1-0{,}95)\times S=d_0-d_4 \quad\Leftrightarrow\quad 0{,}05\times S=6000-6000\times 0{,}95^4 \quad\Leftrightarrow\quad S=\frac{6000-6000\times 0{,}95^4}{0{,}05}$

$S=20\times 6000\times(1-0{,}95^4)=22259$

La quantité totale de déchets produits par l'entreprise entre les années 2019 et 2013 sera : 22259 t.

3. La quantité annuelle de déchets sera diminuée de 40 % par rapport à la quantité de déchets de déchets de 2019 lorsque la quantité annuelle de déchets sera inférieure à $d_0-\frac{40}{100}\times d_0=6000-0{,}4\times 6000=3600$.

On obtient l'algorithme suivant :

```
D ←— 6000
N ←— 0
Tant que  D >=3600
   D ←— D*0.95
   N ←—   N+1
Fin Tant que
```

Remarque : si on éccrit l'algorithme en langage Python

```
def reductionAnnées():
    D=6000
    N=0
    while D>=3600:
        D=D*0.95
        N=N+1
    return N
print(reductionAnnées())
```

Si on exécute l'algorithme, on obtient : 10

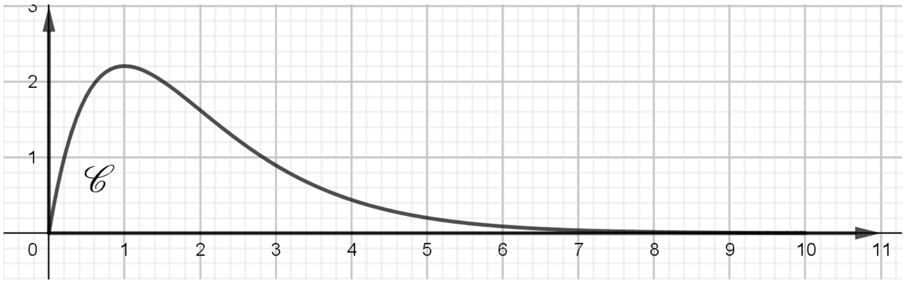
Donc la quantité annuelle de déchets sera pour la première fois inférieure 3600 t (réduction de 40%) en 2019+10=2029.

$d_9=6000\times 0{,}95^9=3781$ (arrondi à la tonne)

$d_{10}=6000\times 0{,}95^{10}=3592$ (arrondi à la tonne).

EXERCICE 4 (5 points)

On procède, chez un sportif, à l'injection intramusculaire d'un produit. Celui-ci se diffuse progressivement dans le sang. On admet que la concentration de ce produit dans le sang (exprimée en mg/L = milligramme par litre) peut-être modélisée par la fonction f, définie sur l'intervalle [0;10] par $f(x)=\frac{6x}{e^x}$ où x est le temps exprimé en heure.
Sa courbe représentative $\mathscr{C}$ est donnée ci-dessous dans un repère orthonormé du plan.



1. Montrer que pour $x\in[0;10]$, la fonction dérivée de f, notée f', a pour expression : $f'(x)=\frac{6-6x}{e^x}$.

2. Étudier le signe de $f'(x)$ sur [0;10] puis en déduire le tableau de variations de f sur [0;10].

3. Quelle est la concentration maximale du médicament dans le sang ? (On donnera la valeur exacte et une valeurapprochée à 10^{-1} près). Au bout de combien de temps est-elle atteinte ?

4. Ce produit fait l'objetd'un règlement par la fédération sportive : un sportif est en infraction si, au moment du contrôle, la concentration dans le sang du produit est supérieure à 2 mg/L.
Le sportif peut-il être contrôlé à tout moment après son injection ? Expliquer votre raisonnement en cours en vous basant sur l'étude de la fonction et/ou une lecture graphique sur la courbe $\mathscr{C}$.

CORRECTION

1. $(e^x)'=e^x$ $\quad \left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'\times v-u\times v'}{v^2}$

$u(x)=6x$ $\quad u'(x)=6$

$v(x)=e^x$ $\quad v'(x)=e^x$

$f'(x)=\frac{6\times e^x-6x\times e^x}{(e^x)^2}=\frac{e^x(6-6x)}{(e^x)^2}=\frac{6-6x}{e^x}$

2. Pour tout nombre réel x, $e^x>0$ donc le signe de $f'(x)$ sur [0;10] est le signe de 6-6x.

$6-6x=0 \Leftrightarrow 6=6x \Leftrightarrow 1=x$

$6-6x>0 \Leftrightarrow 6>6x \Leftrightarrow 1>x$

$6-6x<0 \Leftrightarrow 6<6x \Leftrightarrow 1<x$

On donne le signe de $f'(x)$ sous la forme d'un tableau

x	0		1		10
f '(x)		+	0	−	

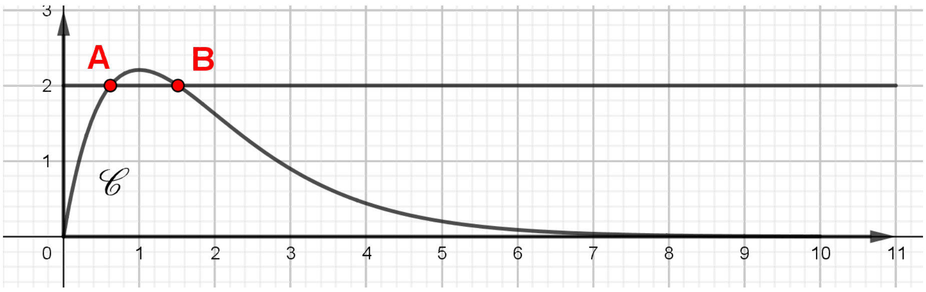
On complète pour obtenir le tableau de variations de f.

x	0		1		10
f '(x)		+	0	−	
f(x)		↗	f(1)	↘	

3. Le maximum de f sur [0;10] est $f(1)=\frac{6}{e}=2{,}2$ à 10^{-1} près.

La concentration maximale est atteinte au bout d'une heure.

4. Les solutions de l'équation $f(x)=2$ sont les abscisses des points d'intersection de $\mathscr{C}$ et la droite d'équation $y=2$.



Il y a 2 points d'intersection l'un A d'abscisse α comprise entre 0 et 1 et l'autre B d'abscisse β comprise entre 1 et 10.

Par lecture graphique : $\alpha=0{,}6$ et $\beta=1{,}5$.

En utilisant la calculatrice :

f est croissante sur [0;1] $\quad f(0{,}61)=1{,}989<2$ et $f(0{,}62)=2{,}001>1$ donc $0{,}61<\alpha<0{,}62$.

f est décroissante sur [1 ;10] $\quad f(1{,}51)=2{,}001>2$ et $f(1{,}52)=1{,}995<2$ donc $1{,}51<\beta<1{,}52$.

Si le sportif est contrôlé pour x appartenant à l'intervalle $]\alpha;\beta[$ alors le sportif est en infraction.

$0{,}61\,h=0{,}61\times 60\,mn=36{,}6\,mn=36\,mn\,36\,s$ $\quad 0{,}62\,h=0{,}62\times 60\,mn=37{,}2\,mn=37\,mn\,12\,s$

$1{,}51\,h=1\,h\,0{,}51\times 60\,mn=1\,h\,30\,mn\,6\,s$ $\quad 1{,}52\,h=1\,h\,0{,}52\times 60\,mn=1\,h\,31\,mn\,12\,s$

Le sportif sera en infraction s'il est contrôlé 37mn après l'injection et avant 1h31mn.