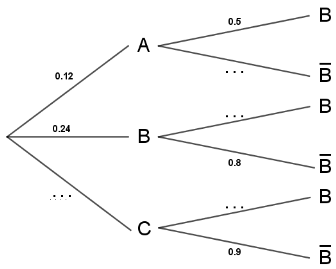
Sujet 29

EXERCICE 1 (5 points)

Cet exercice est un QCM et comprend cinq questions.
Pour chacune des questions, une seule des quatre réponses proposées est correcte.
Les questions sont indépendantes.
Pour chaque question, indiquer le numéro de la question et recopier la lettre correspondant à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée, mais il peut être nécessaire d'effectuer des recherches au brouillon pour aider à déterminer votre réponse.
Chaque réponse correcte rapporte un point. Une réponse incorrecte ou une question sans réponse n'apporte ni ne retire aucun point.

1. L'arbre pondéré ci-dessous représente une situation où A, B, C et D sont des événements d'une expérience aléatoire :



La probabilité de l'événement D est égale à :

a)	0.6	b)	0.8	c)	0.5	d)	0.172

2. L'ensemble des solutions réelles de l'inéquation $-2x^2-5x+3<0$ est :

a)	$]-3;\frac{1}{2}[$	b)	$]-\infty:-3[\cup]\frac{1}{2};;+\infty[$
c)	$]-\infty;-\frac{1}{2}[\cup]3;+\infty[$	d)	$]-\frac{1}{2};3[$

3. On considère la droite $\mathscr{D}$ d'équation $2x-8y+1=0$ (dans un repère orthonormé)
Les coordonnées d'un vecteur normal à $\mathscr{D}$ sont :

a)	$\begin{pmatrix}1\\-4\end{pmatrix}$	b)	$\begin{pmatrix}8\\-2\end{pmatrix}$	c)	$\begin{pmatrix}-8\\2\end{pmatrix}$	d)	$\begin{pmatrix}-4\\1\end{pmatrix}$

4. Dans un repère orthonormé, l'équation du cercle du centre A(-2 ;-4) et de rayon 2 est :

a)	$x^2-4x+y^2-8y+16=0$	b)	$x^2+4x+y^2+8y+16=0$
c)	$x^2-4x+y^2-8y+18=0$	d)	$x^2+4x+y^2+8y+18=0$

5. on considère la suite (u_n) définie par : $u_0=1$ et pour tout entier naturel n $u_{n+1}=u_n+2n-3$

a)	u_1=0	b)	(u_n) est arithmétique
c)	u_3=-2	d)	(u_n) est décroissante

CORRECTION

1. Réponse : d

Preuve non demandée

Formule des probabilités totales :

$P(D)=P(A\cap D)+P(B\cap D)+P(C\cap D)=P(A)\times P_A(D)+P(B)\times P_B(D)+P(C)\times P_C(D)$

On déduit de l'arbre pondéré :

$P(C)=1-P(A)-P(B)=1-0,12-0,24=1-0,36=0,64$

$P_B(D)1-P_b(\bar{D})=1-0,8=0,2$ $\quad$ $P_C(D)=1-P_c(\bar{D})=1-0,9=0,1$

$P(D)=0,12\times 0,5+0,24\times 0,2+0,64\times 0,1=0,06+0,048+0,064=0,172$

2. Réponse : b

Preuve non demandée

$T(x)=-2x^2-5x+3$ $\quad$ $\Delta=(-5)^2-4\times(-2)\times 3=25+24=49=7^2$

$x_1=\dfrac{5-7}{2\times(-2)}=\dfrac{-2}{-4}=\dfrac{1}{2}$ $\quad$ $x_2=\dfrac{5+7}{2\times(-2)}=\dfrac{12}{-4}=-3$

Le coefficient de x^2 est négatif donc $S=]-\infty;-3[\cup\left]\dfrac{1}{2};+\infty\right[$.

3. Réponse : a

Preuve non demandée

$2x-8y+1=0$ $\quad$ $\vec{N}\begin{pmatrix}2\\-8\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à $\mathscr{D}$.

$\vec{N}_a\begin{pmatrix}1\\-4\end{pmatrix}$ $\quad$ $\vec{N}_b\begin{pmatrix}8\\-2\end{pmatrix}$ $\quad$ $\vec{N}_c\begin{pmatrix}-8\\2\end{pmatrix}$ $\quad$ $\vec{N}_d\begin{pmatrix}-4\\1\end{pmatrix}$

or $\vec{N}=2\vec{N}_a$ et $\vec{N}_a$ est un vecteur normal à $\mathscr{D}$.

4. Réponse : c

Preuve non demandée

M(x;y) appartient au cercle de centre A(-2 ;-4) et de rayon 2 $\Leftrightarrow$ $(x+2)^2+(y+4)^2=2^2$

$\Leftrightarrow$ $x^2+4x+4+y^2+8y+16-4=0$ $\Leftrightarrow$ $x^2+4x+y^2+8y+16=0$

5. Réponse : c

Preuve non demandée

$u_0=1$ $\quad$ $u_1=u_0+2\times 0-3=-2$ $\quad$ $u_2=u_1+2\times 1-3=-3$ $\quad$ $u_3=u_2+2\times 2-3=-2$

$u_1=-2\neq 0$ l'affirmation a est fausse.

$u_1-u_0=-2-1=-3\neq u_2-u_1=-3+2=-1$ l'affirmation b est fausse.

$u_2=-3<u_3=-2$ l'affirmation d est fausse.

EXERCICE 2 (5 points)

Dans tout l'exercice, on notera P(E) *la probabilité de l'événement* E.

La répartition des 150 adhérents d'un club de sport est donné par le tableau ci-dessous.

Âge	15 ans	16 ans	17 ans	18 ans
Nombre de Filles	17	39	22	10
Nombre de garçons	13	36	8	5
Total	30	75	30	15

On choisit un adhérent au hasard.

1. Quelle est la probabilité que l'adhérent choisi ait 17 ans ?

2. L'adhérent choisi a 18 ans. Quelle est la probabilité que ce soit une fille ?

On note X la variable aléatoire donnant l'âge de l'adhérent choisi.

3. Déterminer la loi de probabilité de X.

4. Calculer $P(X \geqslant 16)$ et interpréter le résultat.

5. Calculer l'espérance de X. Interpréter le résultat.

CORRECTION

1. Il y a 30 adhérents ayant 17 ans parmi les 150 adhérents.
On note A l'événement : « l'adhérent choisi a 17 ans ».
$P(A)=\frac{30}{150}=\frac{1}{5}=0{,}2$.

2. **O**n note B l'événement : « l'adhérent choisi à 18 ans »
et F l'événement : « l'adhérent choisi est une fille ».
Il y a 10 filles parmi les 15 adhérents ayant 18 ans.
Donc $P_B(F)=\frac{10}{15}=\frac{2}{3}$.

3. Les valeurs de l'univers image sont : 15 , 16, 17 et 18.

$P(X=15)=\frac{30}{150}=\frac{1}{5}=0{,}2$ $\quad P(X=16)=\frac{75}{150}=\frac{1}{2}=0{,}5$

$P(X=17)=0{,}2$ $\quad P(X=18)=\frac{15}{150}=\frac{1}{10}=0{,}1$

On donne la loi de probabilité sous la forme d'un tableau.

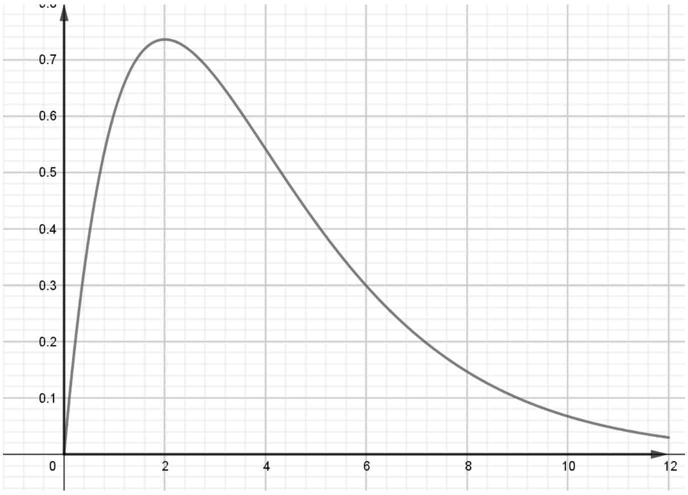
x_i	15	16	17	18
$P(X=x_i)$	0.2	0.5	0.2	0.1

4. $P(X\geqslant 16)=P(X=16)+P(X=17)+P(X=18)=0{,}5+0{,}2+0{,}1=0{,}8$
ou
$P(X\geqslant 16)=1-P(X<16)=1-P(X=15)=1-0{,}2=0{,}8$.
80 % des adhérents du club de sport ont au moins 16 ans.

5. $E(X)=15\times 0{,}2+16\times 0{,}5+17\times 0{,}2+\frac{18}{0{,}1}=3+8+3{,}4+1{,}8=16{,}2$
L'âge moyen des adhérents du club de sport est 16,2 ans.

EXERCICE 3 (5 points)

La concentration d'un médicament dans le sang en $mg.L^{-1}$ au cours du temps t, exprimé en heure est modélisée par la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par : $f(t)=t\,e^{-0,5t}$ dont la représentation graphique est donnée ci-dessous



1. Calculer la valeur exacte de $f(4)$ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

2. On note f' la fonction dérivée de f.
Montrer que pour tout t appartenant à $[0;+\infty[$ $f'(t)=(1-0,5t)e^{-0,5t}$.

3. Étudier le signe de $f'(t)$ sur $0;+\infty[$.

4. Déduire de la question précédente le tableau de variations de la fonction f sur $[0;+\infty[$.

5. Quelle est la concentration maximale du médicament dans le sang ?
On donnera la valeur exacte puis une valeur approchée à 10^{-2} près.

CORRECTION

1. $f(4)=4\times e^{-2}=0{,}54$ à 10^{-2} près.
Au bout de 4 heures la concentration du médicament dans le sang est 0,54 mg.L^{-1}.

2. $(e^w)'=w'\times e^w \qquad (u\times v)'=u'\times v+u\times v'$

$w(t)=-0{,}5t \qquad w'(t)=-0{,}5$

$u(t)=t \qquad u'(t)=1$

$v(t)=e^{-0{,}5t} \qquad v'(t)=-0{,}5e^{-0{,}5t}$

$f'(t)=1\times e^{-0{,}5t}+t\times(-0{,}5e^{-0{,}5t})=(1-0{,}5t)e^{-0{,}5t}$

3. Pour tout t appartenant à $[0;+\infty[$ $e^{-0{,}5t}>0$ donc le signe $f'(t)$ sur $[0;+\infty[$ est le signe de (1-0,5t).

$1-0{,}5t=0 \Leftrightarrow 1=0{,}5t \Leftrightarrow \frac{1}{0{,}5}=t \Leftrightarrow t=2$

$1-0{,}5t>0 \Leftrightarrow 1>0{,}5t \Leftrightarrow \frac{1}{0{,}5}>t \Leftrightarrow 2>t$

$1-0{,}5t<0 \Leftrightarrow 1<0{,}5t \Leftrightarrow \frac{1}{0{,}5}<t \Leftrightarrow 2<t$

On donne le signe de $f'(t)$ sous la forme d'un tableau.

t	0		2		$+\infty$
f '(t)		+	0	−	

4. Tableau de variations de f

t	0		2		$+\infty$
f '(t)		+	0	−	
f(t)	0	$\nearrow$	f(2)	$\searrow$	

$f(0)=0 \qquad f(2)=M$ maximum de f.

5. La concentration maximale de médicament dans le sang est $f(2)=2\times e^{-1}=\frac{2}{e}=0{,}74$ à 10^{-2} près.

EXERCICE 4 (5 points)

Un téléphone coûte 600 euros lors de son lancement.
Tous les ans, le fabricant sort une nouvelle version de ce téléphone.
Le prix de ce téléphone augmente de 3 % chaque année.
On note u_n le prix du téléphone en euros n années après son lancement.
On a donc $u_0=600$.

1. Calculer u_1 et u_2. Interpréter les résultats.

2. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n , pour tout entier naturel n, et en déduire la nature de la suite (u_n).
Préciser sa raison et son premier terme.

3. Exprimer, pour tout entier naturel n, u_n en fonction de n.

4. Recopier et compléter sur la copie la fonction Python ci-dessous pour qu'elle détermine le nombre minimum d'années nécessaires afin que le prix du téléphone dépasse 1000 euros.

```
def nombreAnnees():
  n=0
  u=600
  while . . . . :
    n= . . . .
    u= . . . .
  return n
```

5. Quelle est la valeur renvoyée par cette fonction Python ?

CORRECTION

1. Le prix du téléphone augmente de 3 % chaque année, donc :

$$u_1=u_0+\frac{3}{100}\times u_0=600+\frac{3}{100}\times 600=618$$

$$u_2=u_1+\frac{3}{100}\times u_1=618+\frac{3}{100}\times 618=618+18{,}54=636{,}54$$.

Un an après le lancement, la nouvelle version du téléphone coûte 618 €.
Deux ans après le lancement la nouvelle version du téléphone coûte 636,54 €.

2. Pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1}=u_n+\frac{3}{100}\times u_n=(1+0{,}03)\times u_n=1{,}03\,u_n$$

La suite (u_n) est la suite géométrique de premier terme $u_0=600$ et de raison $q=1{,}03$.

3. Pour tout entier naturel n,

$$u_n=u_0\times q^n=600\times 1{,}03^n$$

4.

```
def nombreAnnees():
  n=0
  u=600
  while u≤ 1000:
    n= n+1
    u= u*1.03
  return n
```

5. Si on exécute le programme on obtient $n=18$.
18 ans après le lancement, la nouvelle version du téléphone coûtera, pour la première fois, une valeur supérieure à 1000 €.
Si on utilise la calculatrice par balayage on obtient :

$u_{17}=991{,}71$ (arrondi au centième).

$u_{18}=1021{,}46$ (arrondi au centième).