Sujet 3

EXERCICE 1 (5 points)

Cet exercice est un QCM et comprend cinq questions.
Pour chacune des questions, une seule des quatre réponses proposées est correcte.
Les questions sont indépendantes.
Pour chaque question, indiquer le numéro de la question et recopier la lettre correspondant à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée, mais il peut être nécessaire d'effectuer des recherches au brouillon pour aider à déterminer votre réponse.
Chaque réponse correcte rapporte un point. Une réponse incorrecte ou une question sans réponse n'apporte ni ne retire aucun point.

Question 1

On lance deux fois une pièce équilibrée, de manières identiques et indépendantes.
Si le joueur obtient 2 faces, il perd 5€, s'il obtient exactement un Face, il gagne 2€, s'il obtient 2 Piles, il gagne 4€. On note G la variable aléatoire correspondant au gain algébrique du joueur, en euros.

a E(G)=0.75	b E(G)= $\frac{1}{3}$	c E(G)=1	d E(G)= $\frac{1}{4}$

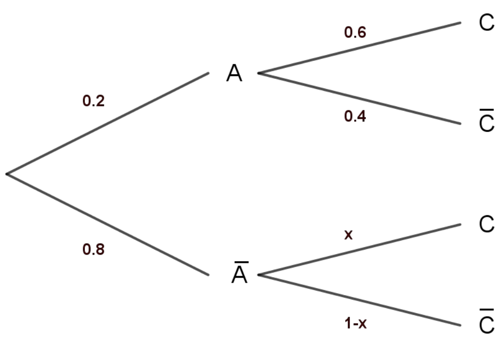
Question 2

A et B sont deux événements et on donne $P(A)=\frac{3}{7}$; $P(B)=\frac{3}{20}$ et $P(A\cup B)=\frac{4}{7}$.

a) A et B sont indépendants	b) $P_A(B)=\frac{3}{980}$	c) $P_A(B)=\frac{1}{140}$	d) $P_A(B)=\frac{1}{60}$

Question 3

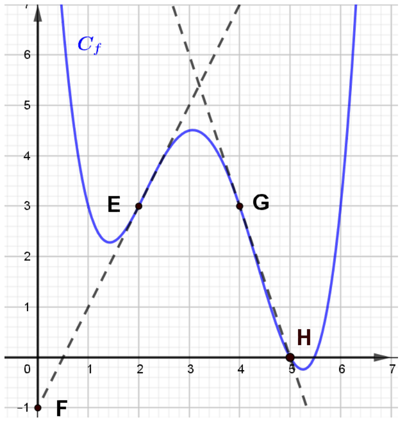
On donne l'arbre de probabilités, ci-dessous, ainsi que la probabilité P(C)=0,48.



a x=0.6	b x=0.36	c x=0.45	d x= $\frac{0.48}{0.12}$

Question 4

On a tracé la courbe représentative C_f , d'une fonction f dans un repère orthonormé, ainsi que deux de ses tangentes, au point E d'abscisse 2 et au point G d'abscisse 4.



Les coordonnées des points E, F, G, H placés dans le repère ci-dessus peuvent être lues graphiquement, ce sont des entiers.
La tangente à C_f au point E est la droite (EF).
La tangente à C_f au point G est la droite (GH).
On note f' la fonction dérivée de f.

a) f '(2)=4	b) f '(2)=-4	c) f '(4)=3	d) f '(4)=-3

Question 5

On considère la fonction Python suivante :

```
def evolu(k):
  i=200
  n=0
  while i<k:
    i=1.2*i+10
    n=n+1
 return n
```

a) evolu(500)=4	b) evolu(600)=5	c) evolu(300)=3	d) evolu(400)=4

CORRECTIONPiles

Question 1 **Réponse :** **a**

Preuve non demandée

La probabilité d'obtenir 2 Faces est : $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$. La probabilité d'obtenir 2 Piles est : $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$.

La probabilité d'obtenir exactement un Face est : $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$.

On peut construire un arbre de probabilités.

$E(G)=-5\times\frac{1}{4}+2\times\frac{1}{2}+4\times\frac{1}{4}=-\frac{5}{4}+2=\frac{3}{4}=0{,}75$

Question 2 **Réponse :** **c**

Preuve non demandée

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$.

$P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)=\frac{3}{7}+\frac{3}{20}-\frac{4}{7}=\frac{3}{20}-\frac{1}{7}$

$P(A\cap B)=\frac{21-20}{140}=\frac{1}{140}$.

Question 3 **Réponse :** **c**

Preuve non demandée

En utilisant la formule des probabilités totales.

$P(C)=P(A\cap C)+P(\bar{A}\cap C)=P(A)\times P_A(C)+P(\bar{A})\times P_{\bar{A}}(C)$

$0{,}48=0{,}2\times0{,}6+0{,}88\times x \quad\Leftrightarrow\quad 0{,}8\,x=0{,}36 \quad\Leftrightarrow\quad x=\frac{36}{80}=0{,}45$

Question 4 **Réponse :** **d**

Preuve non demandée

Par lecture graphique : $E(2;3)$ $G(4;3)$ $F(0;-1)$ $H(5;0)$

$f'(2)$ est égal au coefficient directeur de la droite (EF) $f'(2)=\frac{-1-2}{0-2}=1{,}5$.

$f'(4)$ est égal au coefficient directeur de la droite (GH) $f'(4)=\frac{0-3}{5-4}=-3$.

Question 5 **Réponse :** **d**

Preuve non demandée

1ére boucle (pour $k>200$) $i=200\times1{,}2+10=250$ et $n=1$

2ème boucle (pour $k>250$) $i=250\times1{,}2+10=310$ et $n=2$

$250<300<310$ donc **evolu(300)=2**

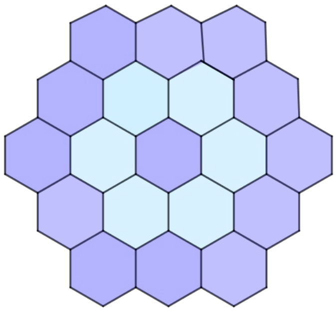
3ème boucle (pour $k>310$) $i=310\times1{,}2+10=382$ et $n=3$

4ème boucle (pour $k>382$) $i=382\times1{,}2+10=468{,}4$ et $n=4$

$310<400<468{,}4$ donc **evolu(400)=4**

EXERCICE 2 (5 points)

Un artisan commence la pose d'un carrelage dans une grande pièce.
Le carrelage choisi a une forme hexagonale.
L'artisan pose un premier au centre de la pièce puis procède en étapes successives de la façon suivante :
. à l'étape 1, il entoure le carreau central, à l'aide 6 carreaux et obtient une première forme.
. à l'étape 2 et aux étapes suivantes, il continue ainsi la pose en entourant la forme précédemment construit.



On note u_n le nombre de carreaux ajoutés par l'artisan pour faire la $n^{\text{ième}}$ étape $(n \geqslant 1)$.
Ainsi $u_1 = 6$ et $u_2 = 12$.

1. Quelle est la valeur de u_3 ?

2. On admet que la suite (u_n) est arithmétique de raison 6. Exprimer u_n, en fonction de n.

3. Combien l'artisan a-t-il ajouté de carreaux au total lorsqu'il termine l'étape 5 ?
Combien a-t-il alors posé de carreaux au total lorsqu'il termine l'étape 5 (en comptant le carreau central initial) ?

4. On pose $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$. Montrer que $S_n = 6 \times (1 + 2 + \ldots + n)$ puis que $S_n = 3n^2 + 3n$.

5. Si on compte le premier carreau central, le nombre total de carreaux posés par l'artisan depuis le début, lorsqu'il termine la $n^{\text{ième}}$ étape, est donc $3n^2 + 3n + 1$.
À la fin de la semaine, l'artisan termine la pose du carrelage en collant son 2977ème carreau.
Combien a-t-il fait d'étapes ?

CORRECTION

1. Pour la $3^{ème}$ étape l'artisan doit ajouter 18 carreaux : 12 ayant 2 côtés communs avec la ligne brisée obtenue après la $2^{ème}$ étape et 6 ayant un seul côté commun avec cette ligne brisée.
$u_3=18$.

2. $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est la suite arithmétique de premier terme $u_1=6$ et de raison $r=6$.
Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 : $u_n=6+(n-1)\times 6=6n$.

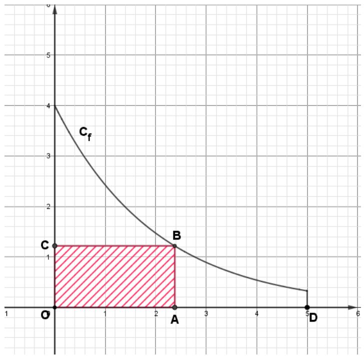
3. L'artisan pour réaliser l'étape 5 a utilisé $u_5=30$ carreaux.
Le nombre total de carreaux utilisé lorsqu'il termine l'étape 5 est : $1+6+12+18+24+30=91$.

4. $S_n=u_1+u_2+\ldots+u_n=6+6\times 2+\ldots+6\times n=6\times(1+2+\ldots+n)$.
$1+2+\ldots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ (somme des n premiers termes de la suite arithmétique de premier terme 1 et de raison 1.
Donc $S_n=6\times\dfrac{n(n+1)}{2}=3n(n+1)=3n^2+3n$.

5. Lorsque l'artisan termine la $n^{ème}$ étape, le nombre de carreaux utilisés est : S_n+1 (carreau central) soit $3n^2+3n+1$.
. $3n^2+3n+1=2977 \Leftrightarrow 3n^2+3n+2976=0 \Leftrightarrow n^2+n-992=0$.
$\Delta=(-1)^2+4\times 992=1+3968=3969=63^2$
$n_1=\dfrac{-1+63}{2}=31 \qquad n_2=\dfrac{-1-63}{}=-32<0$.
Il faut 31 étapes pour que l'artisan colle 2977 carreaux.

EXERCICE 3 (5 points)

Un propriétaire souhaite construire un enclos rectangulaire sur son terrain.
Celui-ci est représenté ci-dessous dans un repère orthonormé, d'unité le mètre. Il est délimité par l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées, la droite d'équation $x=5$ et la courbe C_f représentative de la fonction f définie sur $[0;5]$ par $f(x)=4e^{-0,5x}$.



L'enclos est représenté par le rectangle OABC où O est l'origine du repère et B un point de C_f, A et B étant respectivement sur l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées.
On note x l'abscisse du point A et D le point de coordonnées (5;0).
Le but de cet exercice est de déterminer la position du point A sur le segment [OD] permettant d'obtenir un enclos de superficie maximale.

1. Justifier que la superficie de l'enclos, en m², est donnée en fonction de x par $g(x)=4xe^{-0,5x}$ pour x dans l'intervalle [0;5].

2. La fonction g est dérivable sur [0;5]. Montrer que, pour tout réel x de l'intervalle [0;5], on a : $g'(x)=(4-2x)e^{-0,5x}$.

3. En déduire le tableau de variations de la fonction g sur [0;5].

4. Où doit-on placer le point A sur [OD] pour obtenir une superficie d'enclos maximale ?
Donner la superficie maximale possible en arrondissant le résultat en dm².

CORRECTION

1. $A(0;x)$ B appartient à C_f donc $B(x;f(x))$ $B(x;4e^{-0,5x})$.
$OA=x$ (m) $AB=|y_B-y_A|=4e^{-0,5x}$.
OABC est un rectangle donc la superficie de l'enclos est égale à : $g(x)=x\times(4e^{-0,5x})=4xe^{-0,5x}$.

2. $(e^u)'=u'e^u$ $u(x)=-0,5x$ $u'(x)=-0,5$ $(e^{-0,5x})'=-0,5e^{-0,5x}$
$(v\times w)'=v'\times w+v\times w'$
$v(x)=4x$ $v'(x)=4$ $w(x)=e^{-0,5x}$ $w'(x)=-0,5e^{-0,5x}$.
$g'(x)=4\times e^{-0,5x}+4x\times(-0,5e^{-0,5x})=4e^{-0,5x}-2xe^{-0,5x}=(4-2x)e^{-0,5x}$.

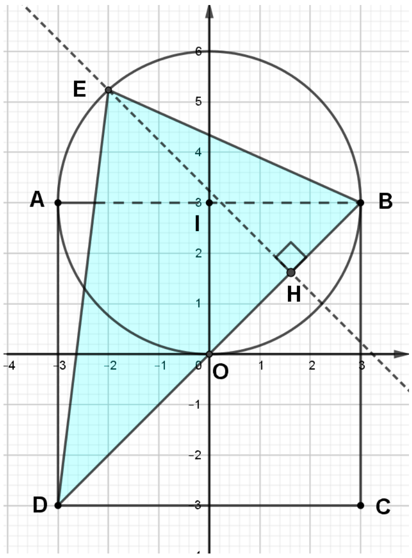
3. Pour tout nombre réel x de [0:5], $e^{-0,5x}>0$, donc le signe de $g'(x)$ est égal au signe de (4-2x).
$4-2x=0 \Leftrightarrow 2x=4 \Leftrightarrow x=2$
$4-2x>0 \Leftrightarrow 4>2x \Leftrightarrow 2>x$.
Tableau de variations de g

x	0		2		5
g '(x)		+	0	−	
g(x)	0	↗	g(2)	↘	g(5)

4. L'aire est maximale pour x=2 donc $A(2;0)$.
$g(2)=8e^{-1}=2,94\ (m^2)$ (arrondi au dm²).

EXERCICE 4 (5 points)

Le logo d'une entreprise est constitué d'un carré, d'un cercle et d'un triangle.
Il a été représenté ci-dessous dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.



On donne les coordonnées des sommets du carré : A(-3;3) B(3;3) C(3 ;-3) D(-3 ;-3).
On considère le point $E(-2;3+\sqrt{5})$.
On admettra que E est situé sur le cercle de diamètre [AB].
On note I le milieu de [AB].

1. Donner une équation cartésienne de la droite (BD) et une équation du cercle de diamètre [AB].

2. Montrer que la hauteur du triangle BDE issue de E admet pour équation cartésienne :
$x+y-(1+\sqrt{5})=0$.

3. Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal H du point E sur la droite (BD).

4. Calculer l'aire du triangle BDE (en unité d'aire).

5. Montrer que $\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{DE}=42+6\sqrt{5}$.
On admet que $\|\overrightarrow{DE}\|=\sqrt{42+12\sqrt{5}}$, en déduire la mesure de l'angle $\widehat{BDE}$ au degré près.

CORRECTION

1. $B(3;3)$ $D(-3;-3)$ $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}-6\\-6\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BD}=-6.\vec{U}$ $\vec{U}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.

(BD) est la droite passant par $B(3;3)$ est de vecteur directeur $\vec{U}$.

$M(x;y)$ $\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix}x-3\\y-3\end{pmatrix}$ $\vec{U}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

M appartient à la droite (BD) si et seulement si $\begin{vmatrix}x-3 & 1\\ y-3 & 1\end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow (x-3)\times 1-(y-3)\times 1=0$

$\Leftrightarrow x-y=0$

. Le cercle de diamètre [AB] est le cercle de centre $I(0;3)$ et de rayon 3 et d'équation :

$(x-0)^2+(y-3)^2=3^2 \Leftrightarrow x^2+y^2-6y+9=9 \Leftrightarrow x^2+y^2-6y=0$.

2. (h_E) est la hauteur du triangle BDE issue de E.

(h_E) est la droite passant par $E(-2;3+\sqrt{5})$ et de vecteur normal $\vec{U}$.

$M(x;y)$ $\overrightarrow{EM}\begin{pmatrix}x+2\\y-3-\sqrt{5}\end{pmatrix}$ $\vec{U}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.

M appartient à la droite (h_E) si et seulement si $\overrightarrow{EM}.\vec{U}=0 \Leftrightarrow (x+2)\times 1+(y-3-\sqrt{5})\times 1=0$

$\Leftrightarrow x+y-(1+\sqrt{5})=0$.

3. Le projeté orthogonal H de E sur la droite (BD) et le point d'intersection des droites (BD) et (h_E).

$$\begin{cases}x-y=0\\ x+y-(1+\sqrt{5})=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=y\\ 2y=1+\sqrt{5}\end{cases} \Leftrightarrow \left\{x=y=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right. \quad H\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2};\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right).$$

4. L'aire, en unité d'aire, du triangle BDE est égale à $\mathcal{A}=\frac{1}{2}\times BD\times EH$.

$BD^2=(-3-3)^2+(-3-3)^2=2\times 36$ $BD=6\sqrt{2}$.

$$EH^2=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}+2\right)^2+\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}-3-\sqrt{5}\right)^2=\left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)^2+\left(\frac{-5-\sqrt{5}}{2}\right)^2=2\times\left(\frac{25+10\sqrt{5}+5}{4}\right)=\frac{30+10\sqrt{5}}{2}$$

$EH^2=15+5\sqrt{5}$ $EH=\sqrt{15+5\sqrt{5}}$.

$\mathcal{A}=\frac{1}{2}\times 6\sqrt{2}\times\sqrt{15+5\sqrt{5}}=3\sqrt{2}\times\sqrt{15+5\sqrt{5}}$

5. $\overrightarrow{DB}\begin{pmatrix}6\\6\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix}1\\6+\sqrt{5}\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{DE}=6\times 1+6\times(6+\sqrt{5})=6+36+6\sqrt{5}=42+6\sqrt{5}$

$\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{DE}=DB\times DE\times\cos(\widehat{BDE})$

$DB=6\sqrt{2}$ $DE=\sqrt{42+12\sqrt{5}}$

$\cos(\widehat{BDE})=\frac{42+6\sqrt{5}}{6\sqrt{2}\times\sqrt{42+12\sqrt{5}}}=\frac{7+\sqrt{5}}{\sqrt{84+24\sqrt{5}}}=0{,}787$ à 10^{-3} près.

$\widehat{BDE}=38°$.