Sujet 30

EXERCICE 1 (5 points)

Cet exercice est un QCM et comprend cinq questions.
Pour chacune des questions, une seule des quatre réponses proposées est correcte.
Les questions sont indépendantes.
Pour chaque question, indiquer le numéro de la question et recopier la lettre correspondant à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée, mais il peut être nécessaire d'effectuer des recherches au brouillon pour aider à déterminer votre réponse.
Chaque réponse correcte rapporte un point. Une réponse incorrecte ou une question sans réponse n'apporte ni ne retire aucun point.

1. L'inéquation $2x^2-9x+4\geqslant 0$ a pour ensemble de solutions :

a. $S=\left[\frac{1}{2};4\right]$

b. $S=\left]-\infty;\frac{1}{2}\right]\cup[4;+\infty[$

c. $S=\emptyset$

d. $S=]-\infty;-4]\cup\left[-\frac{1}{2};+\infty\right[$

2. On considère la fonction g définie sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ par : $g(x)=-x^2+4x$.
Alors :

a. le minimum de la fonction g sur $\mathbb{R}$ est 4

b. le maximum de la fonction g sur $\mathbb{R}$ est 4

c. le minimum de la fonction g sur $\mathbb{R}$ est 2

d. g est croissante sur l'intervalle $[4;+\infty[$.

3. Le plan est rapporté à un repère orthonormé.
La droite passant par le point A(0 ;-7) et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-5\end{pmatrix}$ a pour équation :

a. 2x-5y-35=0

b. 2x-5y+35=0

c. -5x+2y+14=0

d. 5x+2y+14=0

4. Le plan est rapporté à un repère orthonormé.
L'ensemble des points M de coordonnées (x;y) telles que $x^2-4x+y^2+6y=12$ est :

a. le point de coordonnées (5;1)

b. le cercle de centre de coordonnées (2 ;-3) et de rayon $\sqrt{12}$

c. le cercle de centre de coordonnées (2 ;-3) et de rayon 5

d. le cercle de centre de coordonnées (-2;3) et de rayon 5

5. Le plan est muni d'un repère orthonormé. On considère la droite d d'équation 2x+3y-1=0.
Alors :

a. la droite d est perpendiculaire àla droite (AB) où A(-2;3) et B(2;9).

b. le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à la droite d.

c. la droite perpendiculaire à d passant par le point C(-1;2) admet pour équation : 3x-2y+1=0.

d. la droite parallèle à d passant par le point E(2;3) admet pour équation : 2x+3y+13=0

CORRECTION

1. **Réponse : b**

   Preuve non demandée

   $T(x)=2x^2-9x+4 \qquad \Delta=(-9)^2-4\times2\times4=81-32=49=7^2$

   $x_1=\dfrac{9-7}{2\times2}=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2} \qquad x_2=\dfrac{9+7}{4}=\dfrac{16}{4}=4$

   Le coefficient de x^2 est positif donc $S=\left]-\infty;\dfrac{1}{2}\right]\cup[4;+\infty[$.

2. **Réponse : b**

   Preuve non demandée

   On écrit g(x) sous forme canonique $g(x)=-x^2+4x=-(x-2)^2+4$.

   Donc le maximum de g sur $\mathbb{R}$ est 4.

   On peut aussi déterminer les variations de g.

3. **Réponse : a**

   Preuve non demandée

   $A(0;-7) \qquad M(x;y) \qquad \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-0\\y+7\end{pmatrix} \qquad \vec{n}\begin{pmatrix}2\\-5\end{pmatrix}$

   M appartient à la droite passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$ $\Leftrightarrow$ $\vec{n}.\overrightarrow{AM}=0$

   $\Leftrightarrow \quad 2x+(-5)\times(y+5)=0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x-5y-35=0$

4. **Réponse : c**

   Preuve non demandée

   $x^2-4x+y^2+6y=12 \quad \Leftrightarrow \quad (x-2)^2-4+(y+3)^2-9=12 \quad \Leftrightarrow \quad (x-2)^2+(y+3)^2=25=5^2$

   Équation du cercle de centre de coordonnées (2 ;-3) et de rayon 5.

5. **Réponse : a**

   Preuve non demandée

   $A(-2;3) \qquad B(2;9) \qquad \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\6\end{pmatrix}$

   d : $2x+3y-1=0 \qquad \vec{n}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à d.

   $\overrightarrow{AB}=2\vec{n}$ donc la droite d est perpendiculaire à (AB).

EXERCICE 2 (5 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=(2x-1)e^x$.
On note f' la fonction dérivée de la fonction f.

1. Montrer que pour tout réel x, $f'(x)=(2x+1)e^x$

2. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$.

3. En déduire le tableau de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Dans les questions suivantes, on note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère.

4. Déterminer les coordonnées du point d'intersection de $\mathscr{C}$ et l'axe des ordonnées.

5. Déterminer une équation de la tangente T à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

CORRECTION

1. $f(x)=(2x-1)e^x$

$(e^x)'=e^x$ $\quad\quad$ $(u\times v)'=u'\times v+u\times v'$

$u(x)=2x-1$ $\quad\quad$ $u'(x)=2$

$v(x)=e^x$ $\quad\quad$ $v'(x)=e^x$

$f'(x)=2e^x+(2x-1)e^x=(2+2x-1)e^x=(2x+1)e^x$

2. Pour tout nombre réel x, $e^x>0$ donc le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$ est le signe de (2x+1).

$2x+1=0 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}$ $\quad\quad$ $2x+1>0 \Leftrightarrow x>-\frac{1}{2}$ $\quad\quad$ $2x+1<0 \Leftrightarrow x<-\frac{1}{2}$.

On donne le signe de $f'(x)$ (qui est le signe de 2x+1) sous la forme d'un tableau.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
2x+1		$-$	0	$+$	

3. Tableau de variation de f

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
f '(x)		$-$	0	$+$	
f(x)		↘	m	↗	

$$m=-2e^{-\frac{1}{2}}$$

4. $f(x)=(2x-1)e^x$ $\quad\quad$ $f(0)=(0-1)e^0=-1$

Les coordonnées du point d'intersection de $\mathscr{C}$ et l'axe des ordonnées sur (0 ;-1).

5. T est la tangente à $\mathscr{C}$ au point A(0 ;-1) donc le coefficient directeur de T est $f'(0)=(0+1)e^0=1$ et d'ordonnée à l'origine -1.

$T: y=x-1$

EXERCICE 3 (5 points)

On appelle pourcentage de compressions d'une image, le pourcentage de réduction de sa taille en ko (kilo-octets) après compressions.
Une image a pour taille initiale de 800 ko. Après une première compression, sa taille est de 664 ko.

1. Calculer le pourcentage de réduction associé à cette première compression.

Dans la suite de l'exercice, on fixe le pourcentage de réduction à 17 %.
On effectue n compressions successives.
Pour tout entier naturel n, on note t_n la taille de l'image en ko après n compressions.
On a donc $t_0=800$.

2. Pour tout entier naturel n, exprimer t_{n+1} en fonction de t_n et en déduire la nature de la suite (t_n) .

3. Pour tout entier naturel, exprimer t_n en fonction de n.
Afin de déterminer le nombre minimal n de compressions successives à effectuer pour que cette image ait une taille finale inférieure à 50 ko. On considère la fonction Python suivante :

```
def nombreCompressions(A):
  t=800
  n=0
  while t >A:
    t=t*0.83
    n=n+1
  return n
```

4. Préciser, en justifiant le nombre A de sorte que l'appel nombreCompressions(A) renvoie le nombre de compressions successives à effectuer que l'on cherche à déterminer.

5. Quel est le nombre minimal de compressions successives à effectuer pour que ce fichier ait une taille inférieure à 50 ko ?

CORRECTION

1. $800-664=136$ **.**
Le pourcentage de réduction de réduction associé à la première compression est :
$\frac{136}{800}\times 100=\frac{136}{8}=17\%$.

2. Pour tout entier naturel n, la réduction de l'image pendant la $(n+1)^{\text{ième}}$ compression est égale à :
$\frac{17}{100}\times t_n=0{,}17\, t_n$.
Donc $t_{n+1}=t_n-0{,}17\, t_n=(1-0{,}17)\, t_n=0{,}83\, t_n$.
La suite (t_n) est la suite géométrique de raison $q=0{,}83$ et de premier terme $t_0=800$.

3. Pour tout entier naturel n :
$t_n=t_0\times q^n=800\times 0{,}83^n$

4. On veut que l'image soit de taille inférieure (ou égale) à 50 ko donc $A=50$.

5. Si on exécute le programme, on obtient $n=15$.
On peut vérifier, en utilisant la calculatrice que :
$t_{15}=800\times 0{,}83^n=48{,}89\leqslant 50$ (arrondi au centième) et $t_{14}=800\times 0{,}83^{14}=58{,}90>50$.
Il faut effectuer au moins 15 compressions successives pour que la taille de l'image soit inférieure à 50 ko.

EXERCICE 4 (5 points)

Dans un jeu, Jeanne doit trouver la bonne réponse à une question posée.
Les questions sont classées en trois catégories : sport, cinéma et musique.
Jeanne, fervente supportrice de ce jeu, est consciente qu'elle a :
1 chance sur 2 de donner la bonne réponse sachant qu'elle est interrogée en sport.
3 chances sur 4 de donner la bonne réponse sachant qu'elle est interrogée en cinéma.
1 chance sur 4 de donner la bonne réponse sachant qu'elle est interrogée en musique.
On note :
S l'événement : « Jeanne est interrogée en sport » ;
C l'événement : « Jeanne est interrogée en cinéma » ;
M l'événement : « Jeanne est interrogée en musique » ;
B l'événement : »Jeanne donne la bonne réponse ».
Rappel de notation : la probabilité d'un événement A est notée $P(A)$.

Dans chaque catégorie, il y a le même nombre de questions.
On admet donc que $P(S)=P(C)=P(M)=\frac{1}{3}$.

1. Construire un arbre pondéré décrivant la situation.

2. Jeanne tire au hasard une question. Montrer que $P(B)=\frac{1}{2}$.

Pour participer à ce jeu, Jeannine doit payer 10€ de droit d'inscription.
Elle recevra :
- 10€ si elle est interrogée en sport et que sa réponse est bonne.
- 20€ si elle est interrogée en cinéma et que sa réponse est bonne.
- 50€ si elle est interrogée en musique et que sa réponse est bonne.
- rien si la réponse est fausse.

On note X la variable aléatoire qui, à chaque partie jouée par Jeanne associe son gain algébrique c'est à dire la différence en euros entre ce qu'elle reçoit et les 10€ de droit d'inscription.

3. Montrer que $P(X=40)=\frac{1}{12}$.

4. Déterminer la loi de probabilité de X.

5. Calculer l'espérance mathématique de X.
Jeanne a-t-elle intérêt à jouer ?

CORRECTION

1. L'énoncé précise :

$P(S)=P(C)=P(M)=\frac{1}{3}$.

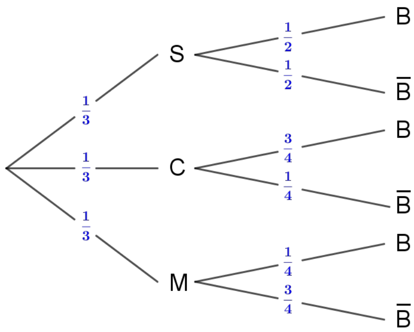
Jeanne a 1 chance sur 2 de donner la bonne réponse sachant qu'elle est interrogée en sport donc $P_S(B)=\frac{1}{2}$.

De même $P_C(B)=\frac{3}{4}$ et $P_M(B)=\frac{1}{4}$.

On obtient :

$P_S(\bar{B})=1-P_S(B)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ $\quad P_C(\bar{B})=1-P_C(C)=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$ $\quad P_M(\bar{B})=1-P_M(B)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

Arbre pondéré :



2. En utilisant la formule des probabilités totales :

$P(B)=P(S\cap B)+P(C\cap B)+P(M\cap B)=P(S)\times P_S(B)+P(C)\times P_C(B)+P(M)\times P_M(B)$

$P(B)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{2}{12}+\frac{3}{12}+\frac{1}{12}=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$.

3. L'événement : $(X=40)=(M\cap B)$

$P(X=40)=P(M\cap B)=P(M)\times P_M(B)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$.

4. On détermine la loi de probabilité de X :

$50-10=40$ $\quad P(X=40)=\frac{1}{12}$

$20-10=10$ $\quad P(X=10)=P(C\cap B)=P(C)\times P_C(B)=\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$

$10-10=0$ $\quad P(X=0)=P(S\cap B)=P(S)\times P_S(B)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$

$0-10=-10$ $\quad P(X=-10)=P(\bar{B})1-P(B)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$.

On donne la loi de probabilité sous forme de tableau.

x_i	-10	0	10	40
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$

5. $E(X)=-10\times\frac{1}{2}+0\times\frac{1}{6}+10\times\frac{1}{4}+40\times\frac{1}{12}=-5+\frac{5}{2}+\frac{10}{3}=\frac{-30+15+20}{6}=\frac{5}{6}$.

$E(X)>0$ donc Jeanne a intérêt à jouer.