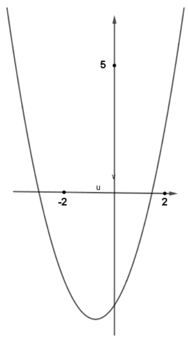
Sujet 31

EXERCICE 1 (5 points)

Cet exercice est un QCM et comprend cinq questions.
Pour chacune des questions, une seule des quatre réponses proposées est correcte.
Les questions sont indépendantes.
Pour chaque question, indiquer le numéro de la question et recopier la lettre correspondant à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée, mais il peut être nécessaire d'effectuer des recherches au brouillon pour aider à déterminer votre réponse.
Chaque réponse correcte rapporte un point. Une réponse incorrecte ou une question sans réponse n'apporte ni ne retire aucun point.

Question 1

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x)=ax^2+bx+c$, où a, b et c sont des nombres réels, Δ désigne la quantité : b^2-4ac .
Parmi les affirmations suivantes, laquelle est cohérente avec la représentation graphique, ci-dessous, de cette fonction ?



a) a >0 et Δ >0	b) a< 0 et Δ< 0	c) a >0 et Δ< 0	d) a< 0 et Δ >0

Question 2

Lors d'un jeu, on mise 1 euro et on tire une carte au hasard parmi 30 cartes numérotées de 1 à 30. On gagne 3 euros si le nombre porté sur la carte est premier, sinon, on ne gagne rien. On détermine le gain algébrique en déduisant le montant de la mise de celui du gain.
On note X la variable aléatoire qui prend pour valeur le gain angébtrique.
Que vaut l'espérance E(X) de la variable X ?

a) $\frac{1}{3}$	b) $\frac{1}{10}$	c) 0	d) $\frac{2}{3}$

Question 3

Quelle est la valeur exacte de $\dfrac{e^6\times e^3}{e^2}$?

a) e^{11}	b) e^9	c) e^7	d) e^{-7}

Question 4

On considère la suite arithmétique (u_n) de raison -5 et telle que $u_1=2$.
Quelle est, pour tout entier naturel n, l'expression du terme général u_n de cette suite ?

a) $u_n=2-5n$	b) $u_n=-5+2n$	c) $u_n=7-5n$	d) $u_n=2.(-5)^n$

Question 5

Les équations cartésiennes ci-dessous sont celles de droites données du plan, le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à l'une de ces droites.
Quelle est l'équation de cette droite ?

a) 2x+y+5=0	b) x+2y+3=0	c) -x+0.5y+2=0	d) - 4x+8y=0

CORRECTION

Question 1 Réponse : a

Preuve non demandée

$f(x)=ax^2+bx+c$ avec $a\neq 0$

Si $a>0$ alors f admet un minimum.
Si $a<0$ alors f admet un maximum.
Si $\Delta>0$ alors la courbe représentative de f coupe l'axe des abscisses en 2 points.
Si $\Delta<0$ alors la courbe représentative de f ne coupe pas l'axe des abscisses.
Pour l'exemple donné, f admet un minimum et sa courbe représentative coupe l'axe des abscisses, on a donc $a>0$ et $\Delta>0$.

Question 2 Réponse : c

Preuve non demandée

On détermine les nombres premiers compris entre 1 et 30 : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29.
Il y a 10 nombres premmiers compris entre 1 et 30.
On note G l'événement : « on gagne la partie » (c'est à dire on tire une carte portant un nombre premier).

$P(G)=\frac{10}{30}=\frac{1}{3}$ $\qquad$ $P(\bar{G})=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

Si on gagne, le gain est 3-1=2, X prend la valeur 2.
Si on perd, le gain est 0-1=-1, X prend la valeur -1.

$E(X)=2\times\frac{1}{3}-1\times\frac{2}{3}=0$

Question 3 Réponse : c

Preuve non demandée

$\frac{e^6\times e^3}{e^2}=\frac{e^{6+3}}{e^2}=\frac{e^9}{e^2}=e^{9-2}=e^7$

Question 4 Réponse : c

Preuve non demandée

(u_n) est la suite arithmétique de premier terme $u_1=2$ et de raison -5.
Pour tout entier naturel n non nul :

$u_n=u_1+(n-1)r=2-5(n-1)=2-5n+5=7-5n$

Question 5 Réponse : d

Preuve non demadée

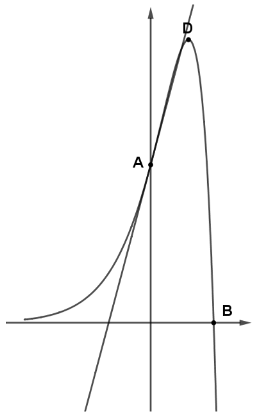
On détermine un vecteur normal à chaque droite.

$\vec{N}_a\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ $\quad$ $\vec{N}_b\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ $\quad$ $\vec{N}_c\begin{pmatrix}-1\\0{,}5\end{pmatrix}$ $\quad$ $\vec{N}_d\begin{pmatrix}-4\\8\end{pmatrix}$ $\quad$ or $\quad$ $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$

On remarque : $\vec{N}_d=4.\vec{u}$.

EXERCICE 2 (5 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=(5-2x)e^x$.
On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f.
Sur la figure ci-dessous, on a tracé la courbe $\mathcal{C}$ dans un repère orthogonal où les unités ont été effacées.
A est le point d'intersection de $\mathcal{C}$ avec l'axe des ordonnées et B est le point d'intersection avec l'axe des abscisses.
D est le point de $\mathcal{C}$ dont l'ordonnée est le maximum de la fonction f sur $\mathbb{R}$.



1. Calculer les coordonnées des points A et B.

2. Soit f' la fonction dérivée de f sur $\mathbb{R}$.
Montrer que pour tout réel x : $f'(x)=(3-2x)e^x$.

3. Étudier les variations de la fonction f.

4. En déduire que le point D admet comme coordonnées $(1,5;2e^{1,5})$.

5. Déterminer une équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point A, puis vérifier à l'aide de l'équation obtenue, que le point D n'appartient pas à cette tangente.

CORRECTION

1. $f(x)=(5-2x)e^{x}$

A est le point d'intersection de $\mathscr{C}$ et l'axe des ordonnées donc $x_A=0$ et $A(0;f(0))$;
$f(0)=(5-0)e^{0}=5$ $A(0;5)$.
B est le point d'intersection de $\mathscr{C}$ et l'axe des abscisses donc $y_B=0$ et $B(x_B;0)$

$f(x_B)=0 \Leftrightarrow (5-2x_B)e^{x_B}=0 \Leftrightarrow 5-2x_B=0 \Leftrightarrow x_B=\frac{5}{2}=2{,}5$.

Car pour tout nombre réel x $e^{x}\neq 0$.
$B(2{,}5;0)$.

2. $(e^{x})'=e^{x}$ et $(u\times v)9'=u'\times v+u\times v'$
$u(x)=5-2x$ $u'(x)=-2$
$v(x)=e^{x}$ $v'(x)=e^{x}$
$f'(x)=-2\times e^{x}+(5-2x)\times e^{x}=(-2+5-2x)e^{x}=(3-2x)e^{x}$

3. Pour tout nombre réel x, $e^{x}>0$ donc le signe de $f'(x)$ est le signe de 3-2x.

$3-2x=0 \Leftrightarrow x=\frac{3}{2}=1{,}5$

$3-2x>0 \Leftrightarrow 3>2x \Leftrightarrow \frac{3}{2}>x \Leftrightarrow 1{,}5>x$

$3-2x<0 \Leftrightarrow 3<2x \Leftrightarrow \frac{3}{2}<x \Leftrightarrow 1{,}5<x$

Variation de f

x	-∞		1.5		+∞
f '(x)		+	0	−	
f(x)		↗	f(1.5)	↘	

4. f est maximale pour $x=1{,}5$. ce maximum est égal à $f(1{,}5)=(5-2\times 1{,}5)e^{1{,}5}=2e^{1{,}5}$.
Donc $D(1{,}5;2e^{1{,}5})$

5. $A(0;5)$
La tangente à $\mathscr{C}$ au point A a pour coefficient directeur : $f'(0)$ et pour ordonnée à l'origine : 5.
$f'(0)=(3-0)e^{0}=3$
L'équation réduite de cette tangente est : $y=3x+5$.
$D(1{,}5;2e^{1{,}5})$ La calculatrice donne 8,96 comme valeur approchée au centième de $2e^{1{,}5}$.
$3\times 1{,}5+5=9{,}5\neq 2e^{1{,}5}$ donc **le point D n'appartient pas à la tangente en A à $\mathscr{C}$.**

EXERCICE 3 (5 points)

On injecte dans le sang d'un malade 2 cm³ d'un médicament. On admet que le processus d'élimination du médicament peut être modélisé par une suite (U_n) dont le terme général U_n représente la valeur en cm³ de médicament présent dans le sang au bout de n heures, n étant un entier naturel.
Dans ce modèle, on considère que le volume de médicament contenu dans le sang diminue de 8 % chaque heure.

1. Vérifier que $U_1 = 1,84$ et en donner une interprétation dans le contexte de l'exercice.

2.a. Pour tout entier naturel n, exprimmer U_{n+1} en fonction de U_n.

2.b. En déduire la nature de la suite (U_n). Préciser sa raison et son premier terme.

3. Pour que le médicament soit actif, le volume du médicament présent dans le sang du malade doit rester supérieur à un certain seuil S. Ce seuil dépend du malade.

3.a. À l'aide d'une fonction écrite en Python, on se propose de déterminer, en fonction de S, le nombre maximal d'heures durant lesquelles le médicament reste actif.
Compléter le programme écrit en Python sur **l'annexe qui est à rendre avec la copie.**

3.b. On s'intéresse au cas d'un malade pour qui le seuil est estimé à $S=1,5$ cm³ . Que doit-on saisir pour exécuter volMedicament afin qu'elle renvoie le nombre maximal d'heures durant lesquelles le le médicament reste actif chez ce malade ? Quel est alors ce nombre d'heures ?

ANNEXE
à rendre avec la copie

```
def volMedicament(S):
  U=2
  n=0
  while U< . .:
    U=U* . . .
    n=n+1
  return n
```

CORRECTION

1. Au bout d'une heure, le volume en cm³ de médicament dans le sang du malade diminue de :
$\frac{8}{100}\times 2=\frac{16}{100}=0{,}16$. Donc $U_1=2-0{,}16=1{,}84$.

2.a. U_n est le volume en cm³ de médicament dans le sang du malade au bout de n heures.
U_{n+1} est le volume en cm³ de médicament dans le sang du malade au bout de $(n+1)$ heures.
Pendant la $(n+1)^{\text{ième}}$ heure le volume diminue de : $\frac{8}{100}\times U_n=0{,}92\,U_n$.
Donc $U_{n+1}=U_n-0{,}08\,U_n=0{,}92\,U_n$.

2.b. **(U_n) est la suite géométrique de premier terme $U_0=2$ et de raison $q=0{,}92$.**

3.a. On complète le programme écrit en Python sur l'annexe.

```
def volMedicament(S):
  U=2
  n=0
  while U< S :
    U=U* 0.92
    n=n+1
  return n
```

3.b. On doit saisir : $S=1{,}5$.
Si on exécute le programme, on obtient : $n=4$.
On peut utiliser la calculatrice.
Pour tout entier naturel n, $U_n=U_0\times 0{,}92^n=2\times 0{,}92^n$.
On obtient : $U_4=1{,}43$ et $U_3=1{,}56$.
Le médicament est actif les trois premières heures et pendant la quatrième heure le médicament devient inactif.

EXERCICE 4 (5 points)

Une culture de pois comporte des pois de couleur « jaune » ou « vert » et de forme « lisse » ou « ridé ».
Le tableau ci-dessous est partiellement renseigné à partir des observations effectuées sur un grand nombre de pois de cette culture.

	Nombre de pois jaunes	Nombre de pois verts	Total
Nombre de pois ridés	100	?	600
Nombres de pois lisses	?	?	?
Total	300	?	10000

1. Compléter le tableau donné en annexe qui est à rendre avec la copie.

On choisit au hasard un pois de la culture et on s'intéresse aux événements suivants :
J : « le pois est jaune » ;
R : « le pois est ridé ».
L'échantillon étudié est suffisamment important pour être considéré comme représentatif de l'ensemble de la culture de pois.

2. Quelle est la probabilité que le pois soit vert et lisse.

3. Calculer la probabilité que le pois soit vert.

4. Calculer la probabilité qu'un pois soit jaune, sachant qu'il est ridé et en déduire la probabilité qu'un pois soit vert, sachant qu'il est ridé.

5. Calculer $P_J(R)$ et en donner une interprétation dans le contexte de l'énoncé.

ANNEXE
à rendre avec la copie

	Nombre de pois jaunes	Nombre de pois verts	Total
Nombre de pois ridés	100		600
Nombres de pois lisses			
Total	300		10000

CORRECTION

1. Le nombre de pois « jaunes » et « lisses » est égal à : $300-100=200$.
Le nombre total de pois « lisses » est égal à : $10000-600=9400$.
Le nombre total de pois « verts » est égal à : $10000-300=9700$
Le nombre de pois « verts » et « ridés » est égal à : $600-100=500$.
Le nombre de pois « verts » et « lisses » est égal à : $9400-200=9200$.

	Nombre de pois jaunes	Nombre de pois verts	Total
Nombre de pois ridés	**100**	**500**	**600**
Nombres de pois lisses	**200**	**9200**	**9400**
Total	**300**	**9700**	**10000**

2. $\bar{J}$ est l'événement : « le petit pois est vert ».
$\bar{R}$ est l'événement le petit pois est lisse ».
$P(\bar{J}\cap\bar{R})=\frac{9200}{10000}=0{,}92$.

3. $P(\bar{R})=\frac{9700}{10000}=0{,}97$.

4. $P_R(J)=\frac{P(R\cap J)}{P(R)}$ $P(R\cap J)=\frac{100}{10000}=0{,}01$ $P(R)=\frac{600}{10000}=0{,}06$ $P_R(J)=\frac{0{,}01}{0{,}06}=\frac{1}{6}$.
$P_R(\bar{J})=1-P_R(J)=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$.

5. $P_J(R)=\frac{P(R\cap J)}{P(J)}$ $P(R\cap J)=0{,}01$ $P(J)=\frac{300}{10000}=0{,}03$ $P_J(R)=\frac{0{,}01}{0{,}03}=\frac{1}{3}$.
Interprétation dans le contexte de l'exercice :
Un tiers des pois jaunes sont ridés.