Sujet 32

EXERCICE 1 (5 points)

Cet exercice est un QCM et comprend cinq questions.
Pour chacune des questions, une seule des quatre réponses proposées est correcte.
Les questions sont indépendantes.
Pour chaque question, indiquer le numéro de la question et recopier la lettre correspondant à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée, mais il peut être nécessaire d'effectuer des recherches au brouillon pour aider à déterminer votre réponse.
Chaque réponse correcte rapporte un point. Une réponse incorrecte ou une question sans réponse n'apporte ni ne retire aucun point.

Question 1

Soit la fonction P définie sur $\mathbb{R}$ par : $P(x)=(x^2+x+1)(x-1)$.
L'équation $P(x)=0$:

a)	n'a pas de solution sur $\mathbb{R}$	b)	a une unique solution sur $\mathbb{R}$
c)	a exactement deux solutions sur $\mathbb{R}$	d)	a exactement trois solutions sur $\mathbb{R}$

Question 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=(7x-23)(e^x+1)$.
L'équation $f(x)=0$:

a)	admet x=1 comme solution	b)	admet deux solutions sur $\mathbb{R}$
c)	admet $x=\frac{23}{7}$ comme solution	d)	admet 0 comme solution

Question 3

Dans un plan rapporté à un repère orthonormé, le cercle de centre $A(-4;2)$ et de rayon $r=\sqrt{2}$ a pour équation :

a)	$(x+4)^2+(y-2)^2=\sqrt{2}$	b)	$(x-4)^2+(y-2)^2=4$
c)	$(x+4)^2+(y-2)^2=2$	d)	$(x-4)^2+(y+2)^2=2$

Question 4

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on considère les vecteurs $\vec{u}(m+1;-1)$ et $\vec{v}(m;2)$ où m est un nombre réel.
Une valeur de m pour laquelle les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux est :

a)	$m=-\frac{2}{3}$	b)	m= -2
c)	m= 2	d)	m=-1

Question 5

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, une équation cartésienne de la droite D passant par le point $A(-2;5)$ et admettant pour vecteur normal $\vec{n}(-1;3)$ est :

a)	**-x+3y+7=0**	**b)**	**x-3y+17=0**
c)	**-3x-y-1=0**	**d)**	**-x-3y+13=0**

CORRECTION

Question 1 **Réponse : b**

Preuve non demandée

$P(x)=0 \Leftrightarrow (x^2+x+1=0 \text{ ou } x-1=0)$

$x^2+x+1=0 \quad \Delta=1^2-4\times1\times1=-3<0$

cette équation n'admet pas de solution.

$x-1=0 \Leftrightarrow x=1$

Question 2 **Réponse : c**

Preuve non demandée

$f(x)=0 \Leftrightarrow (7x-23=0 \text{ ou } e^x+1=0)$

$7x-23=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{23}{7}$

Pour tout nombre réel x, $e^x>0$ donc $e^x+1>1$ et l'équation $e^x+1=0$ n'admet pas de solution

Question 3 **Réponse : c**

Preuve non demandée

Une équation cartésienne du cercle de centre $A(a;b)$ et de rayon r est :

$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$

Si $A(-4;2)$ et $r=\sqrt{2}$ alors $(x+4)^2+(y-2)^2=(\sqrt{2})^2=2$

Question 4 **Réponse : b**

Preuve non demandée

$\vec{u}(m+1;-1) \quad \vec{v}(m;2)$

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux $\Leftrightarrow \vec{u}.\vec{v}=0 \Leftrightarrow (m+1)\times m-1\times2=0 \Leftrightarrow m^2+m-2=0$

$\Delta=1^2-4\times1\times(-2)=1+8=9=3^2$

$m_1=\dfrac{-1-3}{2\times1}=\dfrac{-4}{2}=-2 \qquad m_2=\dfrac{-1+3}{2\times1}=\dfrac{2}{2}=1$

Question 5 **Réponse : b**

Preuve non demandée

$A(-2;5) \quad M(x;y) \quad \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x+2\\y-5\end{pmatrix} \quad \vec{n}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$

M appartient à D $\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\vec{n}=0 \Leftrightarrow -1\times(x+2)+3\times(y-5)=0 \Leftrightarrow -x-2+3y-15=0$

$\Leftrightarrow -x+3y-17=0 \Leftrightarrow x-3y+17=0$

EXERCICE 2 (5points)

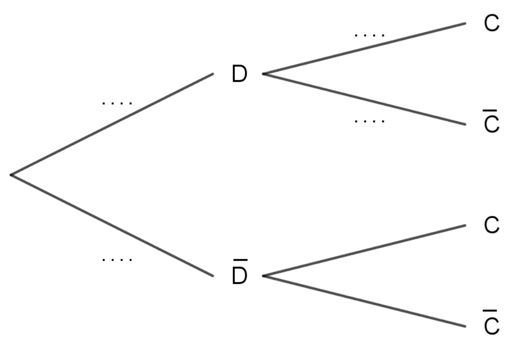
Une entreprise vend des téléviseurs. Une étude a montré que les téléviseurs peuvent rencontrer deux type de défauts : un défaut sur dalle, un défaut sur le condensateur.
L'étude montre que :
. 3 % des téléviseurs présentent un défaut sur dalle et que parmi ceux-ci, 2 % ont également un défaut sur le condensateur.
. 5 % des téléviseurs ont un défaut sur le condensateur.
On choisit un téléviseur au hasard et on considère les événements suivants :
. D : « le téléviseur a un défaut sur la dalle » .
. C : « le téléviseur a un défaut sur le condensateur ».

Pour tout événement E, on note $P(E)$ sa probabilité et $\bar{E}$ l'élénement contraire de E.
Pour tout événement F de probabilité non nulle, on note $P_F(E)$ la probabilité de E sachant que F est réalisé.

Les résultats seront approchés, si nécessaire, à 10^{-4} près.

1. Justifier que $P(D)=0{,}03$ puis donner $P_D(C)$.

2. Recopier l'arbre ci-dessous et compléter uniquement les pointillés par les probabilités associées.



3. Calculer la probabilité $P(D\cap C)$ de l'événement $D\cap C$.

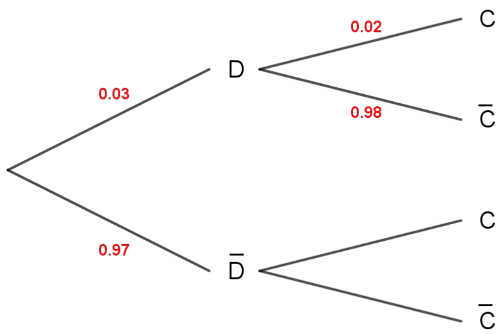
4. Le téléviseur choisi a un défaut sur le condensateur.
Quelle est la probabilité qu'il ait un défaut sur la dalle ?

5. Montrer que la probabilité que lle téléviseur choisi ait un défaut sur le condensateur et n'ait pas de défaut sur la dalle est égale à 0,0494.

CORRECTION

1. 3 % des téléviseurs présentent un défaut sur la dalle donc $P(D)=0{,}03$.
Parmi les téléviseurs présentant un défaut sur la dalle, 2 % ont également un défaut sur le condensateur donc : $P_D(C)=0{,}02$.

2. $P(\bar{D})=1-P(D)=1-0{,}03=0{,}97$.
$P_D(\bar{C})=1-P_D(C)=1-0{,}02=0{,}98$.



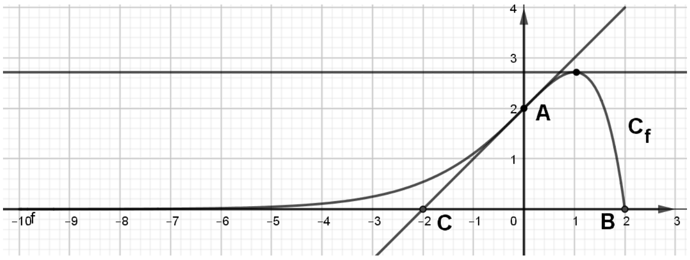
3. $P(D\cap C)=P(D)\times P_D(C)=0{,}03\times 0{,}02=0{,}0006$.

4. 5 % des condensateurs ont un défaut sur le condensateur donc $P(C)=0{,}05$.
On nous demande de calculer $P_C(D)$.
$$P_C(D)=\frac{P(D\cap C)}{P(C)}=\frac{0{,}0006}{0{,}05}=\frac{0{,}06}{5}=\frac{0{,}12}{10}=0{,}012$$

5. En utilisant la formule des probabilités totales, on obtient :
$P(C)=P(D\cap C)+P(\bar{D}\cap C) \quad\Leftrightarrow\quad 0{,}05=0{,}0006+P(\bar{D}\cap C)$
$P(\bar{D}\cap C)=0{,}05-0{,}0006=0{,}0494$.

EXERCICE 3 (5 points)

Dans le repère ci-dessous, on note C_f la courbe représentative d'une fonction f définie sur l'intervalle [-10;2].
On place dans ce repère les points A(0;2), B(2:0) et C(-2;0).
On dispose des renseignements suivants :
. Le point B appartient à la courbe C_f.
. La droite (AC) est la tangente en A à la courbe C_f.
. La tangente à la courbe C_f au point d'abscisse 1 est une droite parallèle à l'axe des abscisses.



1. Déterminer la valeur de $f'(1)$.

2. Donner une équation de la tangente de la courbe C_f en A.

On admet que cette fonction est définie sur [-10:2] par $f(x)=(2-x)e^x$.

3. Montrer que pour tout réel x appartenant à l'intervalle [-10;2], $f'(x)=(-x+1)e^x$.

4. En déduire le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle [-10;2].

5. Déterminer une équation de la tangente à la courbe C_f au point B.

CORRECTION

1. $f'(1)$ est le coefficient directeur de la tangente à C_f au point A c'est à dire le coefficient directeur de la droite (AC).

$f'(1)=\dfrac{y_C-y_A}{x_C-x_A}=\dfrac{0-2}{-2-0}=1$.

2. A(0;2) donc l'ordonnée à l'origine de la tangente au point A est égale à 2 .

$(AC):\ \ y=x+2$.

3. Pour tout nombre réel x de l'intervalle [-10;2], $f(x)=(2-x)e^x$.

$(u\times v)'=u'\times v+u\times v'$

$u(x)=2-x \qquad u'(x)=-1$

$v(x)=e^x \qquad v'(x)=e^x$

$f'(x)=-e^x+(2-x)e^x=(-1+2-x)e^x=(-x+1)e^x$

4. Pour tout nombre réel x de l'intervalle [-10;2], $e^x>0$ donc le signe de $f'(x)$ est le signe (-x+1).

$f'(x)=0 \Leftrightarrow \begin{cases}-10\leqslant x\leqslant 2\\ -x+1=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-10\leqslant x\leqslant 2\\ x=1\end{cases} \Leftrightarrow \{x=1$

$f'(x)>0 \Leftrightarrow \begin{cases}-10\leqslant x\leqslant 2\\ -x+1>1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-10\leqslant x\leqslant 2\\ 1>x\end{cases} \Leftrightarrow \{-10\leqslant x<1$

$f'(x)<0 \Leftrightarrow \begin{cases}-10\leqslant x\leqslant 2\\ -x+1<0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-10\leqslant x\leqslant 2\\ 1<x\end{cases} \Leftrightarrow 1<x\leqslant 2$

Tableau de variation de f.

x	-10		1		2
f '(x)		+	0	–	
f(x)	f(-10)	↗	e	↘	0

$f(1)=(2-1)e^1=e \qquad f(2)=0 \qquad f(-10)=8e^{-10}$

5. On note (T) la tangente à C_f au point B.

$f'(2)=(2-1)e^2=-e^2$

$(T):\ \ y=-e^2x+b$

B(2;0) appartient à (T) donc : $0=-2e^2+b \Leftrightarrow b=2e^2$

$(T):\ \ y=-e^2x+2e^2$

EXERCICE 4 (5 points)

Une médiathèque d'une petite ville a ouvert ses portes début janvier 2013 et enregistré 2500 inscriptions pour l'année 2013.
On estime que, chaque année, 80 % des anciens inscrits renouvellent leur inscription l'année suivante et qu'il aura également 400 nouveaux adhérents.

Pour tout entier naturel n, on peut donc modéliser le nombre d'inscrits à la médiathèque n années après 2013 par une suite numérique (a_n) définie par :
$a_0=2500$ et $a_{n+1}=0{,}8\,a_n+400$.

1. Calculer a_1 et a_2 .

2. On pose, pour tout entier naturel n, $v_n=a_n-2000$
2.a. Démontrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $0{,}8$.
Préciser son premier terme.

2.b. Exprimer, pour tout entier naturel n, v_n en fonction de n.

2.c. En déduire que pour tout entier naturel n, $a_n=500\times0{,}8^n+2000$.

2.d. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $a_n\leqslant2010$.
Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

CORRECTION

1. $a_1=0,8a_0+400=0,8\times2500+400=2000+400=2400$
$a_2=0,8a_1+400=0,8\times2400+400=1920+400=2320$

2.a. Pour tout entier naturel n, $v_n=a_n-2000$ donc $a_n=v_n+2000$
$v_{n+1}=a_{n+1}-2000=0,8a_n+400-2000=0,8\times(v_n+2000)-1600=0,8v_n+1600-1600$
$v_{n+1}=0,8v_n$
(a_n) est la suite géométrique de raison 0,8 et de premier terme $v_0=a_0-2000=2500-2000=500$.

2.b. Pour tout entier naturel n :
$v_n=v_0\times q^n=500\times0,8^n$.

2.c. Pour tout entier naturel n :
$a_n=v_n+2000=500\times0,8^n+2000$

2.d. On peut proposer et exécuter un programme Python, pour déterminer le plus petit entier naturel n tel que $a_n\leqslant2010$.
Programme :

```
a=2500
n=0
while a>2010:
  n=n+1
  a=0.8*a+2000
print(n)
```

Si on exécute ce programme on obtient **$n=18$**
En utilisant la calculatrice par balayage on obtient **$a_{17}=2011,26$** (arrondi au centième) et **$a_{18}=2009,01$** (arrondi au centième).
Conclusion
18 est le plus petit entier naturel tel que $a_n\leqslant2010$.
Interprétation dans le contexte de l'exercice.
2013+18=2031 sera la première année pour laquelle il y aura moins de 2010 inscrits pour la médiathèque.