

Sujet 1

EXERCICE 1 (5 points)

Cet exercice est un QCM et comprend cinq questions.

Pour chacune des questions, une seule des quatre réponses proposées est correcte.

Les questions sont indépendantes.

Pour chaque question, indiquer le numéro de la question et recopier la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée, mais il peut être nécessaire d'effectuer des recherches au brouillon pour aider à déterminer votre réponse.

Chaque réponse correcte rapporte un point. Une réponse incorrecte ou une question sans réponse n'apporte ni ne retire aucun point.

QUESTION 1

Dans un repère du plan, la droite (d) a pour équation $2x - 3y + 1 = 0$.

Un vecteur directeur de la droite (d) est :

a) $\vec{u}(2; -3)$	b) $\vec{v}(3; 2)$	c) $\vec{w}(-3; 1)$	d) $\vec{r}(1; \frac{3}{2})$
---------------------	--------------------	---------------------	------------------------------

QUESTION 2

Dans un repère orthonormé du plan, la droite (d) a pour équation $2x - 3y + 1 = 0$.

Un vecteur normal de la droite (d) est :

a) $\vec{u}(2; -3)$	b) $\vec{v}(3; 2)$	c) $\vec{w}(-3; 1)$	d) $\vec{r}(1; \frac{3}{2})$
---------------------	--------------------	---------------------	------------------------------

QUESTION 3

On donne trois points distincts A, B et C.

Les points D et E sont tels que $\vec{EB} = \vec{BA}$ et $\vec{ED} = 2\vec{BC}$. On a :

a) A est le milieu de [EB]	b) B est le milieu de [ED]
c) C est le milieu de [AD]	d) D est le milieu de [AC]

QUESTION 4

Soit x un nombre réel. Dans un repère orthonormé, les vecteurs $\vec{u}(-x+4; 7)$ et $\vec{v}(9; 2x-5)$ sont orthogonaux lorsque x est égal à :

a) $\frac{1}{5}$	b) 10	c) $-\frac{1}{5}$	d) 6
------------------	-------	-------------------	------

QUESTION 5

Dans un repère orthonormé, on considère les points A(-1 ; -2), B(2;0), C(3 ; -1) et D(-3;4).

Alors $\vec{AC} \cdot \vec{BD}$ est égal à :

a) -16	b) 11	c) 21	d) -24
--------	-------	-------	--------

CORRECTION

QUESTION 1 Réponse : b

Preuve non demandée

Si (D) : $ax + by + c = 0$ avec $a^2 + b^2 \neq 0$ alors $\vec{e}(-b; a)$ est un vecteur directeur de (D).

(d) : $2x - 3y + 1 = 0$ $\vec{v}(3; 2)$ est un vecteur directeur de (d).

QUESTION 2 Réponse : a

Preuve non demandée

Le repère du plan est orthonormé.

Si (D) : $ax + by + c = 0$ avec $a^2 + b^2 \neq 0$ alors $\vec{n}(a; b)$ est un vecteur normal de (D).

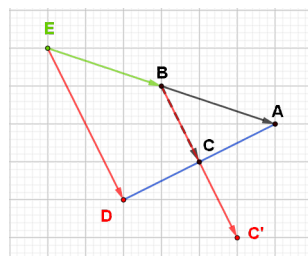
(d) : $2x - 3y + 1 = 0$ $\vec{u}(2; -3)$ est un vecteur normal à (d).

QUESTION 3 Réponse : c

Preuve non demandée

Il est préférable d'effectuer une pour répondre à la question.

$\vec{BC}' = 2 \cdot \vec{BC}$ et le quadrilatère DC'BE est un parallélogramme.



On peut alors affirmer que les réponses a, b et d sont fausses (donc la réponse c est vraie).

On peut démontrer le résultat par un calcul vectoriel.

$$\vec{AD} = \vec{AE} + \vec{ED} = \vec{AB} + \vec{BE} + 2 \cdot \vec{BC} = 2 \cdot \vec{AB} + 2 \cdot \vec{BC} = 2(\vec{AB} + \vec{BC}) = 2 \cdot \vec{AC}$$

donc C est le milieu de [AD].

Attention :

Si on veut utiliser la réciproque du théorème de Thalès alors il ne faut pas affirmer sans justification que les points A, C et D sont alignés.

QUESTION 4 Réponse : c

Preuve non demandée

$$\begin{aligned} \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont orthogonaux} &\Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow (-x+4) \times 9 + 7 \times (2x-5) = 0 \Leftrightarrow -9x + 36 + 14x - 35 = 0 \\ &\Leftrightarrow 5x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{5} \end{aligned}$$

QUESTION 5 Réponse : a

Preuve non demandée

$$\vec{AC}(4; 1) \quad \vec{BD}(-5; 4)$$

$$\vec{AC} \cdot \vec{BD} = 4 \times (-5) + 1 \times 4 = -20 + 4 = -16$$

EXERCICE 2 (5 points)

À partir d'un premier segment de 2 mm, on ajoute (pour construire une spirale) successivement un nouveau segment mesurant 150 % de la longueur du précédent.

Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on désigne par u_n la longueur en mm du $n^{\text{ième}}$ segment.

Ainsi $u_1=2$ et $u_2=3$.

1. Déterminer u_3 et u_4 .
2. Pour tout entier naturel n supérieur à 1, exprimer u_{n+1} en fonction de u_n .
En déduire la nature de la suite (u_n) .
3. Pour tout entier naturel $n \geq 1$, exprimer u_n en fonction de n .
4. On cherche à déterminer à partir de combien de segments, la longueur totale dépasse 1 mètre.
On réalise pour cela un programme en langage Python.
Recopier et compléter sur la copie ce programme pour qu'il affiche le nombre attendu de segments.

```
i=1
u=2
longueur=2
while longueur<1000:
    i=...
    u=...
    longueur=...
    print(i)
```

5. Ce programme affiche 14.
Déterminer par le calcul, la longueur de la spirale formée par les 14 premiers segments.
Arrondir le résultat au mm.

CORRECTION

$$1. \quad u_3 = \frac{150}{100} \times u_2 = 1,5 \times 3 = 4,5$$

$$u_4 = \frac{150}{100} \times u_3 = 1,5 \times 4,5 = 6,75$$

$$2. \quad \text{Pour tout entier naturel } n \geq 1, \quad u_{n+1} = \frac{150}{100} \times u_n = 1,5 \times u_n.$$

(u_n) est la suite géométrique de premier terme $u_1=2$ et de raison $q=1,5$.

$$3. \quad \text{Pour tout entier naturel } n \geq 1,$$

$$u_n = u_1 \times q^{n-1} = 2 \times 1,5^{n-1}$$

$$4. \quad 1 \text{ m} = 1000 \text{ mm}$$

```
i=1
u=2
longueur=2
while longueur<1000:
    i= i+1
    u= u*1.5
    longueur= longueur+u
    print(i)
```

$$5. \quad \text{Si on exécute ce programme, on obtient : } 14.$$

La longueur de la spirale fournie des 14 premiers segments est la somme des 14 premiers termes de la suite (u_n)

$$S = u_1 + u_2 + \dots + u_{14}$$

$$q \times S = u_2 + u_3 + \dots + u_{15}$$

$$q \times S - S = u_{15} - u_1$$

$$1,5 \times S - S = 2 \times 1,5^{14} - 2$$

$$0,5 \times S = 2 \times 1,5^{14} - 2$$

$$S = 4 \times 1,5^{14} - 4 = 1114 \text{ mm}$$

EXERCICE 3 (5 points)

Un libraire dispose d'un stock de magazine. On sait que 40 % des magazines proviennent du fournisseur A et le reste du fournisseur B.

Il constate que 91 % des magazines reçus sont vendus dans la semaine.

Le responsable des achats prend au hasard un magazine dans son stock.

On considère les événements suivants :

A : « le magazine provient du fournisseur A »

B : « le magazine provient du fournisseur B »

S : « le magazine est vendu dans la semaine ».

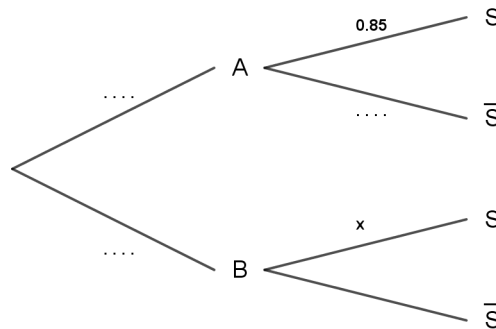
Pour tout événement E, on note $\bar{E}$ l'événement contraire de E.

Pour tous événements E et F où F est un événement de probabilité non nulle, la probabilité de E sachant B est notée $P_F(E)$.

1. Quelle est la probabilité que le magazine provienne du fournisseur B ?

2. On note $P_B(S)=x$, $x \in [0;1]$

Recopier et compléter sur la copie avec les trois valeurs demandées l'arbre pondéré ci-dessous traduisant la situation.



3. Calculer la probabilité que le magazine choisi au hasard provienne du fournisseur A et qu'il soit vendu dans la semaine.

4. Démontrer que $0,34+0,6x=0,91$. En déduire que $P(B \cap S)=0,57$.

5. Le magazine choisi est vendu dans la semaine. Calculer la probabilité qu'il provienne du fournisseur B. En donner sa valeur arrondie à 10^{-3} .

CORRECTION

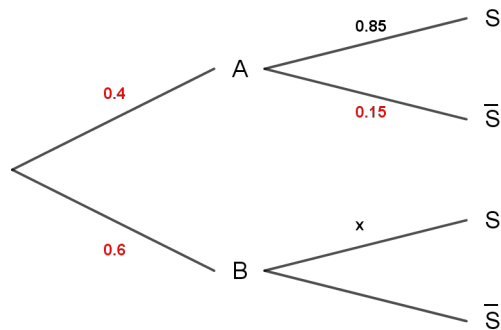
1. On sait que 40 % des magazines proviennent du fournisseur A et le reste du fournisseur B.

Donc $P(A)=0,4$ et $B=\bar{A}$.

$$P(B)=1-P(A)=1-0,4=0,6.$$

2. $P_A(\bar{S})=1-P_A(S)=1-0,85=0,15$

On complète l'arbre pondéré :



3. $P(A \cap S)=P(A) \times P_A(S)=0,4 \times 0,85=0,34$

4. En utilisant l'arbre pondéré ou la formule des probabilités totales, on obtient :

$$P(S)=P(A \cap S)+P(B \cap S).$$

Or 91 % des magazines reçus sont vendus dans la semaine donc $P(S)=0,91$.

$$P(A \cap S)=0,34 \text{ et } P(B \cap S)=P(B) \times P_B(S)=0,6x$$

On obtient : $0,91=0,34+0,6x$ et $P(B \cap S)=0,6x=0,91-0,34=0,57$.

5. On nous demande de calculer $P_S(B)$;

$$\text{Or } P_S(B)=\frac{P(B \cap S)}{P(S)}=\frac{0,57}{0,91}=\frac{57}{91}=0,626$$

EXERCICE 4 (5 points)

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[-5;5]$ par :

$$g(x) = e^x - x + 1.$$

1. On admet que g est dérivable sur l'intervalle $[-5;5]$ et on note g' sa fonction dérivée.
Calculer $g'(x)$.
2. Étudier les variations de g sur l'intervalle $[-5;5]$.
3. Démontrer que g est strictement positive sur $[-5;5]$, c'est à dire que pour tout nombre réel x de $[-5;5]$, on a $g(x) > 0$.

Soit f la fonction définie sur $[-5;5]$ par $f(x) = x + 1 + \frac{x}{e^x}$.

On appelle C_f sa courbe représentative dans un repère du plan.

On admet que f est dérivable sur $[-5;5]$ et on note f' sa fonction dérivée.

4. Démontrer que pour tout nombre réel x de $[-5;5]$, $f'(x) = \frac{1}{e^x} \times g(x)$.
En déduire les variations de f sur l'intervalle $[-5;5]$.

5. Déterminer l'équation de la tangente à C_f au point d'abscisse 0.

CORRECTION

1. $(e^x)' = e^x$ donc pour tout nombre réel de l'intervalle $[-5;5]$, $g'(x) = e^x - 1$.

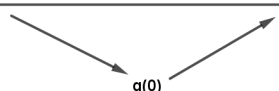
$$2. \quad g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -5 \leq x \leq 5 \\ e^x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5 \leq x \leq 5 \\ e^x = e^0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5 \leq x \leq 5 \\ x = 0 \end{cases}$$

$$g'(x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -5 \leq x \leq 5 \\ e^x - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5 \leq x \leq 5 \\ e^x > e^0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5 \leq x \leq 5 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x \leq 5$$

Car la fonction exponentielle est strictement sur $\mathbb{R}$.

$$g'(x) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -5 \leq x \leq 5 \\ e^x - 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5 \leq x \leq 5 \\ e^x < e^0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5 \leq x \leq 5 \\ x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -5 \leq x < 0$$

On donne les variations de g sous la forme d'un tableau.

x	-5	0	5
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$			

3. $g(0) = e^0 - 0 + 1 = 2 > 0$
 $g(0)$ est le minimum de g sur $[-5;5]$ donc $g(x) \geq 2 > 0$.

Pour tout nombre réel x de $[-5;5]$, $f(x) = x + 1 + \frac{x}{e^x}$.

$$4. \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \times v - u \times v'}{v^2}$$

$$u(x) = x \quad u'(x) = 1 \quad v(x) = e^x \quad v'(x) = e^x$$

$$\left(\frac{x}{e^x}\right)' = \frac{e^x - x e^x}{(e^x)^2} = \frac{e^x(1-x)}{(e^x)^2} = \frac{1-x}{e^x}$$

$$f'(x) = 1 + \frac{1-x}{e^x} = \frac{e^x - 1 - x}{e^x} = \frac{1}{e^x} \times (e^x - x + 1) = \frac{1}{e^x} \times g(x)$$

Pour tout nombre réel x de $[-5;5]$ $e^x > 0$ et $g(x) > 0$ donc $f'(x) > 0$.

f est strictement croissante sur $[-5;5]$.

$$5. \quad f'(0) = \frac{1}{e^0} \times g(0) = \frac{1}{1} \times 2 = 2$$

$$f(0) = 0 + 1 + \frac{0}{e^0} = 1$$

(T) : $y = 2x + 1$