Sujet 1

EXERCICE 1 (5 points)

Cet exercice est un QCM et comprend cinq questions.
Pour chacune des questions, une seule des quatre réponses proposées est correcte.
Les questions sont indépendantes.
Pour chaque question, indiquer le numéro de la question et recopier la lettre correspondant à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée, mais il peut être nécessaire d'effectuer des recherches au brouillon pour aider à déterminer votre réponse.
Chaque réponse correcte rapporte un point. Une réponse incorrecte ou une question sans réponse n'apporte ni ne retire aucun point.

1. L'ensemble des solutions de l'inéquation $-3x^2+2x+1>0$ est :

A	B	C	D
$\left\{-\frac{1}{3};1\right\}$	$\varnothing$	$\left]-\frac{1}{3};1\right[$	$\left]-\infty;-\frac{1}{3}\right[\cup]1;+\infty[$

2. Le plan est muni d'un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

Une équation cartésienne de la droite (d) passant par le point A(-1;5) et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$ est :

A	B	C	D
-2x+3y+13=0	-2x-3y-13=0	2x-3y+13=0	-2x-3y+13=0

3. Soit la fonction définie sur $]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$ par $f(x)=\frac{2x+1}{x-2}$.

La fonction dérivée de f est définie sur $]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$ par :

A	B	C	D
$f'(x)=\frac{5}{(x-2)^2}$	$f'(x)=\frac{3x-6}{(x-2)^2}$	$f'(x)=\frac{-3}{(x-2)^2}$	$f'(x)=\frac{-5}{(x-2)^2}$

4. Pour tout nombre réel x, une expression simplifiée de $\frac{(e^x)^2\times e^{-x+1}}{e^{5x}}$ est :

A	B	C	D
e^{-4x+1}	e^{x^2-6x+1}	e^{x^2+4x+1}	$e^{-x^3+x^2-5x}$

5. La fonction f est définie pour tout x réel par $f(x)=e^x(3e^x-1)$.
La fonction dérivée de f est définie pour tout x réel par :

A	B	C	D
$f'(x)=e^x(3e^x)$	$f'(x)=6e^{2x}-e^x$	$f'(x)=3e^{2x}-e^x$	$f'(x)=3(e^x)^2-1$

CORRECTION

1. Réponse : C

Preuve non demandée

$T(x)=-x^2+2x+1 \qquad \Delta=2^2-4\times(-3)\times 1=16=4^2$

$x_1=\dfrac{-4}{2\times(-3)}=\dfrac{-6}{-6}=1 \qquad x_2=\dfrac{-2+4}{2\times(-3)}=\dfrac{2}{-6}=-\dfrac{1}{3}$

Le coefficient de x^2 de T(x) est négatif donc **le trinôme est positif à l'intérieur des racines.**

2. Réponse : D

Preuve non demandée

A(-1;5) M(x;y) $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x+1\\ y-5\end{pmatrix}$ $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\ -2\end{pmatrix}$

M appartient à (d) $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow$ $\begin{vmatrix}x+1 & 3\\ y-5 & -2\end{vmatrix}=0$ $\Leftrightarrow$ $-2(x+1)-3(y-5)=0$

$\Leftrightarrow$ $-2x-3y+13=0$

3. Réponse : D

Preuve non demandée

$\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'\times v-u\times v'}{v^2}$

$u(x)=2x+1 \qquad u'(x)=2$

$v(x)=x-2 \qquad v'(x)=1$

$f'(x)=\dfrac{2\times(x-2)-(2x+1)\times 1}{(x-2)^2}=\dfrac{-5}{(x-2)^2}$

4. Réponse : A

Preuve non demandée

$\dfrac{(e^x)^2\times e^{-x+1}}{e^{5x}}=e^{2x}\times e^{-x+1}\times e^{-5x}=e^{2x-x+1-5x}=e^{-4x+1}$

5. Réponse : B

Preuve non demandée

$f(x)=e^x(3e^x-1)$

$(u\times v)'=u'\times v+u\times v'$

$u(x)=e^x \qquad u'(x)=e^x$

$v(x)=3e^x-1 \qquad v'(x)=3e^x$

$f'(x)=e^x(3e^x-1)+e^x(3e^x)=3(e^x)^2-e^x+3(e^x)^2=3e^{2x}+3e^{2x}-e^x=6e^{2x}-e^x$

EXERCICE 2 (5 points)

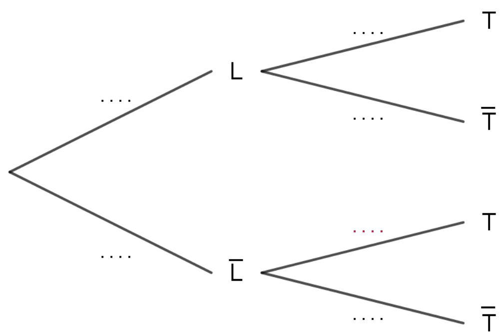
Un pépiniériste stocke un grand nombre d'arbustes de la famille des *viburnum* en vue de les vendre. Ceux-ci sont de deux espèces différentes : les *viburnum tinus* (nom commun : laurier tin) et les *viburnum opulus* (nom commun : boule de neige). Il constate que :
. 80 % de ses arbustes sont des lauriers tins, les autres sont des boules de neige.
. Parmi les lauriers tins, 41 % mesurent 1m10 ou plus.
. Parmi les boules de neige 32 % mesurent 1m10 ou plus.

1. Est-il vrai que moins de 15 % des *viburnum* de ce pépiniériste sont des boules de neige de moins de 1m10 ?

On choisit au hasard un *viburnum* chez ce pépiniériste et on considère les événements suivants.
. L : « le *viburnum* choisi est un laurier tin »
. T : « le *viburnum* choisi mesure plus de 1m10 ».

2. Décrire par une phrase la probabilité $P_L(\overline{T})$.
Décrire par une phrase l'événement $\overline{L}\cap T$.

3. Recopier et compléter sur la copie l'arbre de probabilité ci-dessous traduisant les données de l'énoncé.



4. Montrer que la probabilité que le *viburnum* mesure 1m10 ou plus est égale à 0,392.

5. Le *viburnum* a une taille inférieure à 1m10. Quelle est la probabilité que ce soit un boule de neige ?
On arrondira le résultat à 10^{-3}.

CORRECTION

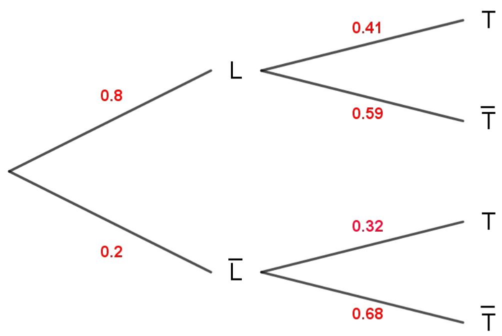
1. 80 % des *viburnum* sont des lauriers tins donc 20 % sont des boules de neige.
Parmi les boules de neige 32 % mesurent 1m10 ou plus donc 68 % mesurent moins de 1m10.
Conséquence :
68% de 20% des *viburnum* du pépiniériste sont des boules de neige mesurant moins de 1m10.
$\frac{68}{100}\times\frac{20}{100}=\frac{1360}{10000}=\frac{13{,}6}{100}$
Donc 13,6 % des *viburnum* du pépiniériste sont des boules de neige de moins de 1m10.
Il est donc vrai que moins de 15 % des *viburnum* de ce pépiniériste sont des boules de neige de moins de 1m10.

2. $P_L(\bar{T})$ **est la probabilité que le *viburnum* choisi mesure moins moins de 1m10 sachant que l'on a choisi un laurier tin.**

. $\bar{L}\cap T$ **est l'événement : « le *viburnum* choisi est un boule de neige de 1m10 ou plus ».**

3. $P(L)=0{,}8$ et $P(T)=0{,}2$
$P_L(T)=0{,}41$ et $P_L(\bar{T})=1-0{,}41=0{,}59$
$P_{\bar{L}}(T)=0{,}32$ et $P_{\bar{L}}(\bar{T})=1-0{,}32=0{,}68$

. On obtient l'arbre de probabilité suivant :



4. En utilisant l'arbre pondéré ou la formules des probabilités totales.
$P(T)=P(T\cap L)+P(T\cap\bar{L})=P(L)\times P_L(T)+P(\bar{L})\times P_{\bar{L}}(T)=0{,}8\times0{,}41+0{,}2\times0{,}32=0{,}328+0{,}064$
$P(T)=0{,}392$

5. On nous demande de calculer $P_{\bar{T}}(\bar{L})$.
$P_{\bar{T}}(\bar{L})=\frac{P(\bar{L}\cap\bar{T})}{P(\bar{T})}$
$P(\bar{L}\cap\bar{T})=P(\bar{L})\times P_{\bar{L}}(\bar{T})=0{,}2\times0{,}68=0{,}136$
$P(\bar{T})=1-0{,}392=0{,}608$
$P_{\bar{T}}(\bar{L})=\frac{0{,}136}{0{,}608}=0{,}224$ à 10^{-3} près.

EXERCICE 3 (5 points)

Les deux parties sont indépendantes.

Partie A

On considère la suite (v_n) définie par $v_0=1$ et $v_{n+1}+\frac{2}{3}v_n$ pour tout entier naturel n.

1. Quelle est la nature de la suite (v_n) ? En préciser les éléments caractéristiques.

2. Donner, pour tout entier naturel n, une expression de v_n en fonction de n.

3. Calculer la somme des dix premiers termes de la suite (v_n) .

Partie B

On modélise une suite (w_n) à l'aide de la fonction suivante écrite en langage Python.

```
def terme(n):
  w=4
  for i in range(n):
    w=2*w-3
  return w
```

4. Que renvoie l'exécution de terme(5) ?

5. En s'inspirant de la fonction terme(n), proposer une fonction somme_terme(n), écrite en langage Python,qui renvoie la somme des n premiers de la suite (w_n) .

CORRECTION

Partie A

1. Pour tout entier naturel n, $v_{n+1}=\frac{2}{3}v_n$ et $v_0=1$.

La suite (v_n) et la suite géométrique de premier terme $v_0=1$ et de raison $q=\frac{2}{3}$.

2. Pour tout entier naturel n, $v_n=v_0\times q^n=1\times\left(\frac{2}{3}\right)^n=\left(\frac{2}{3}\right)^n$.

3. La somme des dix premiers termes de la suite (v_n) est : $S=v_0+v_1+\ldots+v_9$.

$qS=v_1+v_2+\ldots+v_{10}$ donc $S-qS=v_0-v_{10}$ $\Leftrightarrow$ $(1-q)S=v_0+v_{10}$

$\left(1-\frac{2}{3}\right)S=1-\left(\frac{2}{3}\right)^{10}$ $\Leftrightarrow$ $\frac{1}{3}S=1-\left(\frac{2}{3}\right)^{10}$ $\Leftrightarrow$ $S=3\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{10}\right)$

4. i prend successivement toutes les valeurs entières comprise entre 0 et n-1.

Pour i=0 on obtient $w_1=5$
Pour i=1 on obtient $w_2=7$
Pour i=2 on obtient $w_3=11$
Pour i=3 on obtient $w_4=19$
Pour i=4 on obtient $w_5=35$

L'exécution de terme(5) renvoie le sixième terme de la suite (w_n) : $w_5=35$.

5. Pour tout entier naturel non nul n :

```
def somme_terme(n):
  w=4
  S=4
  for i in range(n-1):
    w=2*w-3
    S=S+w
  return S
```

Remarque :
Si on exécute somme_terme(5) on obtient : **46.**
Car $S=w_0+w_1+w_2+w_3+w_4=4+5+7+11+19=46$

EXERCICE 4 (5 points)

On considère la fonction f définie pour tout nombre réel x de l'intervalle [-1;5] par :
$f(x)=x^3-6x^2+9x+1$.

1. Soit f' la fonction dérivée de f. Déterminer, pour tout nombre réel x de [-1;5], l'expression de $f'(x)$.

2. Montrer que pour tout nombre réel x de [-1;5], $f'(x)=3(x-1)(x-3)$.

3. Dresser le tableau de signe de $f'(x)$ pour [-1;5] et en déduire le tableau de variation de la fonction f sur ce même intervalle.

4. Déterminer l'équation de la tangente T à la courbe de la fonction f au point d'abscisse 0.

5. Déterminer l'autre point de la courbe de f en lequel la tangente est parallèle à T.

CORRECTION

1. Pour tout nombre réel de [-1;5] :
$f'(x)=3x^2-12x+9$

2. On développe $3(x-1)(x-3)=3(x^2-x-3x+3)=3(x^2-4x+3)=3x^2-12x+9$
Donc pour tout réel x de [-1;5] : $f'(x)=3(x-1)(x-3)$.

3. $f'(x)$ est un trinôme dont les racines sont 1 et 3 et le coefficient de x^2 est positif donc ce trinôme est négatif sur]1;3[et positif sur[-1;1[et]3;5].
Tableau de variation de f

x	-1		1		3		5
f '(x)		+	0	−	0	+	
f(x)	-15	↗	5	↘	1	↗	21

4. A(0;1) $f'(0)=9$
$T:\ y=9x+1$

5. On détermine les abscisses des points de la courbe admettant une tangente dont le coefficient directeur est égal à 9.
$f'(x)=9 \Leftrightarrow 3x^2-12x+9=9 \Leftrightarrow 3x^2-12x=0 \Leftrightarrow 3x(x-4)=0 \Leftrightarrow (x=0 \text{ ou } x=4)$
remarque : $-1\leqslant 4\leqslant 5$
$f(4)=64-6\times16-9\times4+1=64-96+36+1=5$.
La tangente T', à la courbe représentative de f au point B(4;5) est parallèle à T.