

Sujet 1

EXERCICE 1 (5 points)

Cet exercice est un QCM et comprend cinq questions.

Pour chacune des questions, une seule des quatre réponses proposées est correcte.

Les questions sont indépendantes.

Pour chaque question, indiquer le numéro de la question et recopier la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée, mais il peut être nécessaire d'effectuer des recherches au brouillon pour aider à déterminer votre réponse.

Chaque réponse correcte rapporte un point. Une réponse incorrecte ou une question sans réponse n'apporte ni ne retire aucun point.

1. L'ensemble des solutions de l'inéquation $3x^2 - 4x + 1 \geq 0$ est :

A	B	C	D
$] - \infty; -1] \cup [-\frac{1}{3}; +\infty[$	$] - \infty; \frac{1}{3}] \cup [1; +\infty[$	$] - \infty; -\frac{1}{3}] \cup [1; +\infty[$	$[\frac{1}{3}; 1]$

2. Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} a+2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 3 \\ a \end{pmatrix}$ où a est un nombre réel. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si :

A	B	C	D
$a(a+2)-3=0$	$a(a+2)+3=0$	$3(a+2)-a=0$	$3(a+2)+a=0$

3. Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère le point $A(-2;3)$ et le vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Une équation cartésienne de la droite d passant par le point A et le vecteur directeur $\vec{u}$ est :

A	B	C	D
$-2x+y-7=0$	$x+2y-4=0$	$x-2y+8=0$	$2x+y+1=0$

4. On considère la suite (u_n) géométrique de raison 2 et de premier terme $u_0=3$.

La somme $u_0+u_1+\dots+u_{10}$ est égale à :

A	B	C	D
$3(2^{11} - 1)$	$3(1 - 2^{11})$	$3(2^{10} - 1)$	$3(1 - 2^{10})$

5. Soit f la fonction définie et dérivable sur $]1; +\infty[$ par $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$.

La fonction dérivée de f sur $]1; +\infty[$ a pour expression :

A	B	C	D
$f'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2}$	$f'(x) = \frac{-3}{(x-1)^2}$	$f'(x) = \frac{4x-1}{(x-1)^2}$	$f'(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$

CORRECTION

1. Réponse : B

Preuve non demandée

$$T(x) = 3x^2 - 4x + 1 \quad \Delta = (-4)^2 - 4 \times 3 \times 1 = 4 = 2^2$$

$$x_1 = \frac{4-2}{2 \times 3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \quad x_2 = \frac{4+2}{2 \times 3} = \frac{6}{6} = 1$$

Le coefficient de x^2 est positif donc $T(x)$ est positif ou nul à l'extérieur de l'intervalle compris entre les racines. Donc la Réponse : B est vraie.

2. Réponse : C

Preuve non demandée

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (a+2) \times 3 - 1 \times a = 3(a+2) - a$$

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux $\Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow 3(a+2) - a = 0$

3. Réponse : A

Preuve non demandée

$$\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad M(x;y) \quad A(-2;3) \quad \overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x+2 \\ y-3 \end{pmatrix}$$

M appartient à la droite d passant par A et de vecteur directeur $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & x+2 \\ 2 & y-3 \end{vmatrix} = 0$

$$\Leftrightarrow 1 \times (y-3) - 2 \times (x+2) = 0 \Leftrightarrow y-3-2x-4=0 \Leftrightarrow -2x+y-7=0$$

4. Réponse : A

Preuve non demandée

Pour tout entier naturel n , $u_n = u_0 \times q^n = 3 \times 2^n$

$$S = u_0 + u_1 + \dots + u_{10} \quad q \times S = u_1 + u_2 + \dots + u_{10} + u_{11}$$

$$q \times S - S = u_{11} - u_0 \Leftrightarrow 2S - S = 3 \times 2^{11} - 3 \Leftrightarrow S = 3(2^{11} - 1)$$

5. Réponse : B

Preuve non demandée

$$\left(\frac{u}{v} \right)' = \frac{u' \times v - u \times v'}{v^2}$$

$$u(x) = 2x+1 \quad u'(x) = 2$$

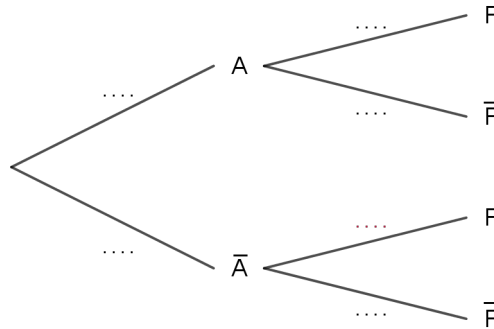
$$v(x) = x-1 \quad v'(x) = 1$$

$$f'(x) = \frac{2(x-1) - (2x+1) \times 1}{(x-1)^2} = \frac{-3}{(x-1)^2}$$

EXERCICE 2 (5 points)

Un organisme de vacances propose des séjours en France et à l'étranger pour des jeunes. Ces derniers sont répartis en deux catégories suivant leur âge : adolescents ou jeunes enfants. 40 % des participants sont des adolescents et parmi eux 70 % choisissent un séjour à l'étranger. Parmi les jeunes enfants, 90 % choisissent un séjour en France. On interroge au hasard un participant à un séjour de cet organisme. On note A l'événement : « le participant est un adolescent » et F l'événement : « le participant choisi un séjour en France ».

1. Recopier et compléter sur la copie les branches de l'arbre de probabilité ci-dessous pour qu'il représente la situation.



2. Calculer la probabilité que le participant soit un adolescent et qu'il choisisse un séjour à l'étranger.
3. Montrer que la probabilité qu'un participant choisisse un séjour à l'étranger est 0,36.
4. Calculer la probabilité que le participant ne soit pas un adolescent, sachant qu'il part à l'étranger. Donner la valeur arrondie au centième de cette probabilité.
5. On interroge au hasard, et de manière indépendante, deux participants à des séjours de cet organisme pour connaître s'ils ont choisi un séjour en France ou non. L'organisation de ce sondage est telle qu'une personne peut-être interrogée deux fois. Calculer la probabilité qu'au moins un des deux participants ait choisi un séjour en France. Donner cette probabilité arrondie au centième.

CORRECTION

1. 40 % des participants sont des adolescents donc :

$$P(A)=0,4 \text{ et } P(\bar{A})=1-P(A)=1-0,4=0,6$$

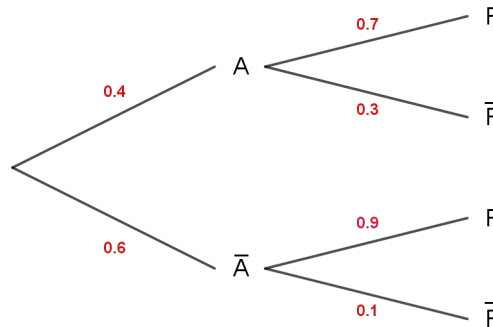
- . Parmi les participants, 70 % choisissent un séjour à l'étranger, donc :

$$P_A(\bar{F})=0,7 \text{ et } P_A(F)=1-P_A(\bar{F})=1-0,7=0,3$$

- . Parmi les jeunes enfants, 90 % choisissent un séjour en France, donc :

$$P_{\bar{A}}(F)=0,9 \text{ et } P_{\bar{A}}(\bar{F})=1-P_{\bar{A}}(F)=1-0,9=0,1$$

- . On obtient l'arbre pondéré suivant :



2. $P(A \cap \bar{F}) = P(A) \times P_A(\bar{F}) = 0,4 \times 0,7 = 0,28$

3. En utilisant l'arbre pondéré ou le théorème des probabilités totales.

$$P(\bar{F}) = P(A \cap \bar{F}) + P(\bar{A} \cap \bar{F}) = 0,28 + P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(\bar{F}) = 0,28 + 0,6 \times 0,1$$

$$P(\bar{F}) = 0,28 + 0,06 = 0,34$$

4. On nous demande de calculer $P_{\bar{F}}(\bar{A})$

$$P_{\bar{F}}(\bar{A}) = \frac{P(\bar{F} \cap \bar{A})}{P(\bar{F})} = \frac{0,06}{0,34} = \frac{6}{34} = \frac{3}{17} = 0,18 \text{ au centième près}$$

5. Si on choisit un participant, au hasard, alors $P(\bar{F})=0,34$ et $P(F)=1-0,34=0,66$.

On note F_1 l'événement : « le premier participant choisi un séjour en France » et F_2 l'événement : « le deuxième participant choisi un séjour en France ».

$$P(F_1)=P(F_2)=0,66.$$

L'événement : « au moins un des deux participants a choisi un séjour en France » est

l'événement : $F_1 \cup F_2$.

$$P(F_1 \cup F_2) = P(F_1) + P(F_2) - P(F_1 \cap F_2)$$

On interroge au hasard et de manière indépendante les deux participants, donc :

$$P(F_1 \cap F_2) = P(F_1) \times P(F_2) = 0,66^2$$

$$P(F_1 \cup F_2) = 0,66 + 0,66 - 0,66^2 = 0,66 \times (2 - 0,66) = 0,66 \times 1,34 = 0,88 \text{ au centième près.}$$

EXERCICE 3 (5 points)

Une commune compte 800 habitants au début de l'année 2019.

La mairie prévoit une baisse de 2 % par an du nombre d'habitants à partir de 2019.

Pour tout entier naturel n , on note u_n le nombre d'habitants n années après 2019.

Ainsi, $u_0 = 800$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 0,98 u_n$.

1. Calculer u_1 et préciser ce que cette valeur représente dans le contexte de l'exercice.
2. Préciser la nature de la suite (u_n) ainsi que sa raison.
3. Déterminer, pour tout entier naturel n , l'expression de u_n en fonction de n .
4. Calculer une valeur approchée, à l'entier près, du nombre d'habitants dans cette commune en 2025.
5. Recopier et compléter sur la copie la fonction écrite en langage Python ci-dessous afin qu'elle permette de calculer, pour tout entier n , le terme u_n .

```
def u(n):  
    u = ...  
    for i in range(1, ...):  
        u = ....  
    return ...
```

CORRECTION

1. $u_1 = 0,98 \times u_0 = 0,98 \times 800 = 784$

Au début de l'année $2019+1=2020$, le nombre d'habitants de la commune sera 784.

2. Pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 0,98 \times u_n$ donc **la suite (u_n) est la suite géométrique de premier terme u_0 et de raison $q=0,98$.**

3. Pour tout entier n , $u_n = u_0 \times q^n = 800 \times 0,98^n$.

4. $2025 = 2019 + 6$

Le nombre d'habitants est l'arrondi à l'unité de u_6 .

$u_6 = 800 \times 0,98^6$ en utilisant la calculatrice, on obtient : 709.

5.

```
def u(n):  
    u= 800  
    for i in range(1,n+1):  
        u= 098*u  
    return n
```

EXERCICE 4 (5 points)

Partie A : lecture graphique

1. Dans le plan muni d'un repère orthonormé, C_f est la courbe représentative d'une fonction f , définie et dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.

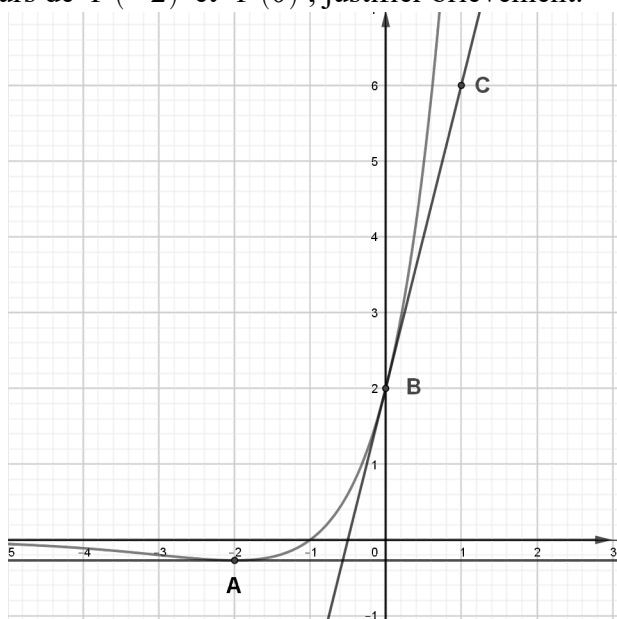
Dans la figure ci-dessous, on a tracé la courbe C_f .

Les points A et B sont les points de C_f d'abscisses respectives -2 et 0, et on a tracé les tangentes à C_f en ces points.

On suppose que la tangente en A est parallèle à l'axe des abscisses et que la tangente en B passe par le point C(1;6).

On note f' la fonction dérivée de f .

Lire graphiquement les valeurs de $f'(-2)$ et $f'(0)$, justifier brièvement.



Partie B : calcul algébrique

La fonction représentée sur le graphique précédent est la fonction f définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par : $f(x) = e^x(2x+2)$.

On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que pour tout nombre réel x , $f'(x) = e^x(2x+4)$.
3. Étudier le signe de f' sur $\mathbb{R}$, en déduire le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.
4. Déterminer par le calcul, l'équation réduite de la tangente à C_f au point d'abscisse 0.
5. Justifier par le calcul les deux résultats suivants admis au début de l'exercice.
 - . La tangente en A est parallèle à l'axe des abscisses.
 - . La tangente en B passe par le point C(1;6).

CORRECTION

1. La tangente à C_f au point $A(-2;0)$ est horizontale donc le coefficient directeur de cette droite est égal à 0 et $f'(-2)=0$.

• La tangente à C_f au point $B(0;2)$ passe par le point $C(1;6)$ donc $f'(0)$ est le coefficient directeur de la droite (BC) soit $\frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{6-2}{1-0} = 4$, $f'(0)=4$.

2. $(u \times v)' = u' \times v + u \times v'$

$$f(x) = e^x(2x+2)$$

$$u(x) = e^x$$

$$u'(x) = e^x$$

$$v(x) = 2x+2$$

$$v'(x) = 2$$

$$f'(x) = e^x(2x+2) + e^x(2) = e^x(2x+2+2) = e^x(2x+4).$$

3. $f'(x) = e^x(2x+4)$

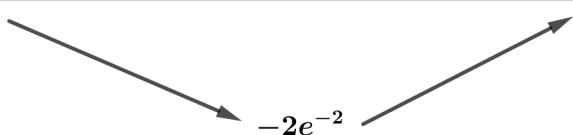
Pour tout nombre réel x , $e^x > 0$ donc le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$ est le signe $2x+4$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x+4=0 \Leftrightarrow 2x=-4 \Leftrightarrow x=-2$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 2x+4 > 0 \Leftrightarrow 2x > -4 \Leftrightarrow x > -2$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow 2x+4 < 0 \Leftrightarrow 2x < -4 \Leftrightarrow x < -2$$

Tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$			

$$f(-2) = e^{-2}(2 \times (-2) + 2) = -2e^{-2}$$

4. Soit (T) la tangente à C_f au point B d'abscisse 0.

Le coefficient directeur de (T) est $f'(0)=4$ et d'ordonnée à l'origine $f(0)=2$.

$$(T): y=4x+2.$$

5. $f'(-2)=0$ donc le coefficient directeur de la tangente à C_f au point A d'abscisse -2 est 0.

Donc cette tangente est horizontale.

• (T) : $y=4x+2$

Pour $x=1$ on a $y=6$ donc la tangente (T) à C_f au point B passe par le point $C(1;6)$.