Sujet 1

EXERCICE 1 (5 points)

Cet exercice est un QCM et comprend cinq questions.
Pour chacune des questions, une seule des quatre réponses proposées est correcte.
Les questions sont indépendantes.
Pour chaque question, indiquer le numéro de la question et recopier la lettre correspondant à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée, mais il peut être nécessaire d'effectuer des recherches au brouillon pour aider à déterminer votre réponse.
Chaque réponse correcte rapporte un point. Une réponse incorrecte ou une question sans réponse n'apporte ni ne retire aucun point.

1. Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on considère la droite D d'équation cartésienne : 4x+5y-7=0
Un vecteur normal à D a pour coordonnées :

a)	**(5;4)**	**b)**	**(-5;4)**	**c)**	**(4;5)**	**d)**	**(4;-5)**

2. Dans un repère orthonormé, l'ensemble des points M de coordonnées (x;y) vérifiant :
$x^2-2x+y^2=3$ est un cercle :

a. de centre A(1;0) et de rayon 2
b. de centre A(1;0) et de rayon 4
c. de centre A(-1;0) et de rayon 2
d. de centre A(-1;0) et de rayon 4

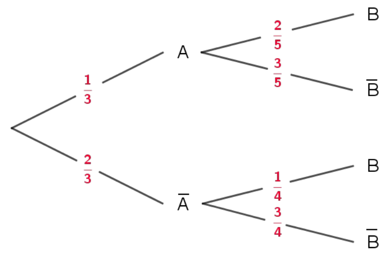
3. La somme $15+16+17+\ldots+243$ est égale à :

a)	**29 403**	**b)**	**29 412**	**c)**	**29 541**	**d)**	**29 646**

4. On considère la fonction f définie et dérivable sur ℝ par : $f(x)=(x+1)e^x$.
La fonction dérivée f' de f est définie sur ℝ par :

a. $f'(x)=(x+2)e^x$
b. $f'(x)=(x+1)e^x$
c. $f'(x)=xe^x$
d. $f'(x)=e^x$

5. En utilisant l'arbre de probabilité pondéré ci-dessous,



on obtient :

a. $P(B)=\frac{1}{4}$
b. $P(B)=\frac{2}{5}$
c. $P(B)=\frac{13}{20}$
d. $P(B)=\frac{3}{10}$

CORRECTION

1. **Réponse : c**

Preuve non demandée

D : 4x+5y-7=0 $\vec{N}\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}$ **est un vecteur normal à D.**

2. **Réponse : a**

Preuve non demandée

$x^2-2x+y^2=3 \quad\Leftrightarrow\quad (x-1)^2-1+y^2=3 \quad\Leftrightarrow\quad (x-1)^2+y^2=4=2^2$

Équation du cercle de centre A(1:0) et de rayon 2.

3. **Réponse : c**

Preuve non demandée

On doit calculer la somme des premiers termes d'une suite arithmétique (u_n) de premier terme $u_0=15$ et de raison 1.

Pour tout entier naturel n : $u_n=u_0+nr$ donc $243=15+n\times 1 \quad\Leftrightarrow\quad n=228$.

Le nombre de termes de u_0 à u_{228} est $228+1=229$.

$S=\frac{(u_0+u_{228})\times 229}{2}$ = **29 541.**

4. **Réponse : a**

Preuve non demandée

$(u\times v)'=u'\times v+u\times v'$

$u(x)=x+1 \qquad u'(x)=1$

$v(x)=e^x \qquad v'(x)=e^x$

$f'(x)=1\times e^x+(x+1)\times e^x=(x+2)\times e^x$.

5. **Réponse : d**

Preuve non demandée

$P(B)=P(A\cap B)+P(\bar{A}\cap B)=P(A)\times P_A(B)+P(\bar{A})\times P_{\bar{A}}(B)$

$P(B)=\frac{1}{3}\times\frac{2}{5}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{2}{15}+\frac{1}{6}=\frac{4+5}{30}=\frac{9}{30}=\frac{3}{10}$

EXERCICE 2 (5 points)

Dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ du plan, on considère les points A(2 ;-1) ; B(0 ;3) et C(3;1).

1.a. Vérifier que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=6$.

1.b. Calculer $\|\overrightarrow{AB}\|$ et $\|\overrightarrow{AC}\|$. On donnera les valeurs exactes.

1.c. Vérifier que $\cos(\widehat{BAC})=0,6$, en déduire la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$ au degré près.

2.a. Vérifier qu'une équation cartésienne de la droite (AB) est : $2x+y-3=0$.

2.b. On note H le pied de la hauteur du triangle issue de C.
Déterminer les coordonnées du point H.

CORRECTION

1.a. A(2 ;-1) ; B(0;3) ; C(3;1) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=-2\times1+4\times2=-2+8=6$.

1.b. $\|\overrightarrow{AB}\|^2=(-2)^2+4^2=4+16=20$ $\|\overrightarrow{AB}\|=\sqrt{20}=\sqrt{4\times5}=2\sqrt{5}$.

$\|\overrightarrow{AC}\|^2=1^2+2^2=1+4=5$ $\|\overrightarrow{AC}\|=\sqrt{5}$.

1.c. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB\times AC\times\cos(\widehat{BAC})=2\sqrt{5}\times\sqrt{5}\times\cos(\widehat{BAC})=10\times\cos(\widehat{BAC})$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=6 \Leftrightarrow 10\times\cos(\widehat{BAC})=6 \Leftrightarrow \cos(\widehat{BAC})=0{,}6$.

En utilisant la calculatrice, on obtient : $\overrightarrow{BAC}=53°$ (arrondi au degré).

2.a. M(x;y) $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-2\\y+1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}$

M appartient à (AB) $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow \begin{vmatrix}x-2 & -2\\ y+1 & 4\end{vmatrix}=0$

$\Leftrightarrow 4\times(x-2)+2\times(y+1)=0 \Leftrightarrow 4x-8+2y+2=0 \Leftrightarrow 4x+2y-6=0$

$\Leftrightarrow 2x+y-3=0$.

2.b. (h_C) est la hauteur du triangle ABC issue de C. $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur normal à (h_C).

M(x;y) $\overrightarrow{CM}\begin{pmatrix}x-3\\y-1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}$

M appartient à (h_C) $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CM}=0 \Leftrightarrow -2\times(x-3)+4\times(y-1)=0 \Leftrightarrow$

$-2x+6+4y-4=0 \Leftrightarrow -2x+4y+2=0 \Leftrightarrow -x+2y+1=0$

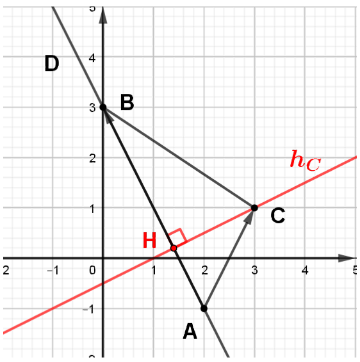
H est le point d'intersection de AB) et (h_C).

$\begin{cases}2x+y-3=0\\-x+2y+1=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x+y=3\\-x+2y=-1\end{cases}$

On obtient : 5y=1 $\Leftrightarrow y=\frac{1}{5}$ $-5x=-7 \Leftrightarrow x=\frac{7}{5}$

$H\left(\frac{7}{5};\frac{1}{5}\right)$

On donne une figure non demandée.



EXERCICE 3 (5 points)

En 1995, le taux de scolarisation des jeunes de 18 ans atteignait 84,8 % du fait d'une forte progression de la poursuite de la poursuite d'études dans le second cycle général et technologique jusqu'au baccalauréat.
Une étude de l'INSEE montre que ce taux de scolarisation a régulièrement diminué au cours des dix années suivantes.
On considère que la diminution du taux de scolarisation des jeunes de 18 ans est chaque année de 1 % à partir de 1995.
Pour tout entier naturel n, on modélise le taux de scolarisation des jeunes de 18 ans en 1995+n, par une suite (u_n), ainsi $u_0=84,8$.

1. Quel est le taux de scolarisation des jeunes âgés de 18 ans en 1996 ?

2. Déterminer, en justifiant, la nature de la suite (u_n).

3. On donne le programme suivant en langage Python :

```
U=84.8
n=0
while U>80:
  U=U*0.99
  n=n+1
```

Déterminer la valeur numérique que contient la variable n à l'issue de l'exécution du programme.
Interpréter cette valeur dans le contexte de l'énoncé.

4. Exprimer, pour tout entier naturel n, u_n en fonction de n.

5. Quel est le taux de scolarisation des jeunes de 18 ans en 2005.

CORRECTION

1. $u_1=u_0-\frac{1}{100}\times u_0=84{,}8-0{,}01\times 84{,}8=84{,}8-0{,}848=83{,}952$;

Le taux de scolarisation des jeunes âgés de 18 ans en 1996 est 83,952 %.

2. Le taux de scolarisation des jeunes âgés de 18 ans diminue de 1 % chaque année pendant 10ans.
Pour entier naturel n ($n<10$), :

$u_{n+1}=u_n-\frac{1}{100}\times u_n=n_n-0{,}01\,u_n=(1-0{,}01)\,u_n=0{,}99\,u_n$

(u_n) est la suite géométrique de premier terme $u_0=84{,}8$ et de raison 0,99.

3. Si on exécute le programme on obtient n=6.
Si on calcule successivement les premiers termes de la suite avec la calculatrice, on obtient :
$u_1=83{,}95$; $u_2=83{,}11$; $u_3=82{,}28$; $u_4=81{,}46$; $u_5=80{,}65$ et $u_6=79{,}84$.
On donne les résultats arrondis au centième.
1995+6=2001 ;
En 2001, pour la première année le taux de scolarisation des jeunes âgés 18 ans est inférieur à 80 %.

4. Pour tout entier naturel n $(n\leqslant 10)$:
$u_n=u_0\times q_n=84{,}8\times 0{,}99^n$.

5. 2005=1995+10
$u_{10}=84{,}8\times 0{,}99^{10}=76{,}69$ (arrondi au centième).

EXERCICE 4 (5 points)

Soit f la fonction dérivable définie sur [-3;3] par $f(x)=2x^3+2x^2-2x+1$ /
On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère donné.

1. Déterminer $f'(x)$ où f' est la fonction dérivée de f sur [-3;3].

2. Étudier le signe de $f'(x)$ sur [-3;3].

3. Dresser le tableau de variations sur [-3;3] ;
Les valeurs aux bornes peuvent-être données en valeurs approchées à 10^{-2} près.

4.a. Vérifier qu'une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse 0 est :
$y=-2x+1$.

4.b. Montrer que cette tangente T passe par un point B de la courbe $\mathscr{C}$ avec B distinct du point A.

CORRECTION

1. Pour tout nombre réel x de l'intervalle [-3;3], $f(x)=2x^3+2x^2-2x-1$ donc :
$f'(x)=6x^2+4x-2$.

2. $f'(x)=6x^2+4x-2$
$\Delta=16-4\times 6+(-2)=64=8^2$
$x_1=\dfrac{-4+8}{2\times 6}=\dfrac{4}{12}=\dfrac{1}{3}$ $\qquad x_2=\dfrac{-4-8}{2\times 6}=\dfrac{-12}{12}=-1$
Le coefficient de x^2 est positif.
On donne le signe de $f'(x)$ sous forme de tableau.

x	$-\infty$		-3		-1		$\frac{1}{3}$		3		$+\infty$
$6x^2+4x-2$	//////	//////		+	0	$-$	0	+		//////	//////

3.

x	-3		-1		$\frac{1}{3}$		3
f '(x)		+	0	$-$	0	+	
f(x)	-29	↗	3	↘	0.63	↗	67

$f(-3)=54+18-6+1=-29$
$f(-1)=-2+2+2+1=3$
$f(3)=54+18-6+1=67$
$f\left(\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{2}{27}+\dfrac{2}{9}-\dfrac{2}{3}+1=\dfrac{2+6-18+27}{27}=\dfrac{17}{27}=0{,}63$ (arrondi au centième)

4.a. $f(0)=1$ donc $A(0;1)$ et $f'(0)=-2$ donc le coefficient directeur de T est -2.
T : $y=-2x+1$

4.b. On détermine l'intersection de T et $\mathscr{C}$
$$\begin{cases} y=2x^3+2x^2-2x+1 \\ y=\quad -2x+1 \end{cases}$$
On obtient : $2x^3+2x^2-2x+1=-2x+1 \iff 2x^3+2x^2=0 \iff 2x^2(x+1)=0$
$\iff$ (x=0 ou x=-1)
T passe par le point B d'abscisse 1 soit B(1;3)