Sujet 37

EXERCICE 1 (5 points)

Cet exercice est un QCM et comprend cinq questions.
Pour chacune des questions, une seule des quatre réponses proposées est correcte.
Les questions sont indépendantes.
Pour chaque question, indiquer le numéro de la question et recopier la lettre correspondant à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée, mais il peut être nécessaire d'effectuer des recherches au brouillon pour aider à déterminer votre réponse.
Chaque réponse correcte rapporte un point. Une réponse incorrecte ou une question sans réponse n'apporte ni ne retire aucun point.

Question 1

Soit x un nombre réel. On peut affirmer que :

a. $\cos(x)=\sin(x)$

b. $\cos(\pi-x)=\cos(\pi+x)$

c. $\sin(\pi-x)=\sin(\pi+x)$

d. $\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$

Question 2

Les solutions dans l'intervalle $[0;2\pi]$ de l'équation $\sin(x)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

a. $\frac{4\pi}{3}$ et $\frac{5\pi}{3}$

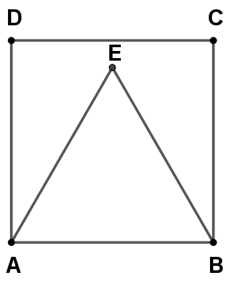
b. $\frac{2\pi}{3}$ et $\frac{4\pi}{3}$

c. $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{2\pi}{3}$

d. $-\frac{2\pi}{3}$ et $-\frac{\pi}{3}$

Question 3

On considère ABCD un carré direct dans lequel on construit ABE équilatéral direct.



On note AB=a
On peut affirmer que :

a. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}a^2$

b. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=a^2$

c. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}a^2$

d. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DC}=-a^2$

Question 4

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs, on peut affirmer que :

a. $\vec{u}.\vec{v}=0$

b. $\vec{u}.\vec{v}=-\vec{v}.\vec{u}$

c. $\vec{u}.\vec{u}=\frac{1}{2}\|\vec{u}\|^2$

d. $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2=\|\vec{u}^2\|+\|\vec{v}\|^2+2\vec{u}.\vec{v}$

Question 5

Soit n un entier naturel.
On cherche à exprimer en fonction de la somme suivante :
$S=1-2+4-8+16-32+\ldots+(-2)^n$
On peut affirmer que ;

a. $S=\frac{1+(-2)^n}{2}\times(n+1)$

b. S est la somme des termes d'une suite arithmétique de raison (-2)

c. $S=\frac{1-(-2)^n}{1-2}$

c. $S=\frac{1}{3}\left(1-(-2)^{n+1}\right)$

CORRECTION

Question 1 réponse : b

Preuve non demandée

a. $\cos(0)=1\neq 0=\sin(0)$

b. $\cos(\pi-x)=-\cos(x)=\cos(\pi+x)$

c. $\sin(\pi+x)=-\sin(x)$ et $\sin(\pi-x)=\sin(x)$

d. $\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\sin(x)$ et $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin(x)$

Question 2 réponse : b

Preuve non demandée

a. $\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$

b. $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

c. $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

d. $\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ et $\cos(-\frac{\pi}{3})=\frac{\sqrt{3}}{2}$

Question 3 réponse : c

Preuve non demandée

a. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB\times AC\times\cos(45^\circ)=a\times\sqrt{2}a\times\frac{\sqrt{2}}{2}=a^2$ car $AC=\sqrt{2}a$

b. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=AB\times AD\times\cos(90^\circ)=0$

c. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AE}=AB\times AE\times\cos(60^\circ)=a\times a\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}a^2$

d. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DC}=a^2$ car $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{AB}^2=a^2$

Question 4 réponse : d

Preuve non demandée

a. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas nécessairement orthogonaux.

b. $\vec{u}.\vec{v}=\vec{v}.\vec{u}$

c. $\vec{u}.\vec{u}=\vec{u}^2=\|\vec{u}\|^2$

d. $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2=(\vec{u}+\vec{v})^2=\vec{u}^2+\vec{v}^2+2\vec{u}.\vec{v}=\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2+2\vec{u}.\vec{v}$

donc

Question 5 réponse : d

Preuve non demandée

S est la somme des $n+1$ premiers termes de la suite géométrique de premier terme $u_0=1$ et de raison $q=-2$.

$$S=1-2+4-8+16-32+\ldots+(-2)^n$$
$$-2S=-2+4-8+16-32+64+\ldots+(-2)^{n+1}$$

$S+2S=1-(-2)^{n+1}$ donc $S=\frac{1}{3}(1-(2)^{n+1})$.

EXERCICE 2 (5 points)

Un magasin effectue des promotions avant la liquidation définitive, chaque semaine les prix sont diminués de 10 % par rapport à la semaine précédente.
Un manteau coûte 200€ avant le début de la liquidation.
On pose $u_0=200$ et on note u_n son prix lors de la n[ième] semaine de liquidation.

1. Calculer les termes u_1 et u_2 de la suite (u_n).

2. Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique de premier terme $u_0=200$ dont on précisera la raison et exprimer le terme général de la suite (u_n) en fonction de n.

3. La liquidation dure 12 semaines, déterminer le prix du manteau à la fin de la liquidation s'il est toujours en vente. On donnera le résultat arrondi au centième.

4. On considère la fonction suivante, écrit en langage Python :

```
def seuil(x):
    u=200
    n=0
    while . . . . ..:
        u= . . . .
        n= . . . . .
    return n
```

Recopier et compléter sur la copie afin quelle renvoie le nombre de semaines nécessaires pour que le terme général de la suite (u_n) soit inférieur au nombre réel x.

5. Une personne décide d'acheter le manteau dès que son prix sera inférieur à 100€.
Combien de semaines devra-t-elle attendre ?

CORRECTION

1. Chaque semaine les prix sont diminués de 10 %.

$u_0=200$ $\quad u_1=u_0-\frac{10}{100}u_0=200-0,1\times 200=180$ $\quad u_2=u_1-\frac{10}{100}u_1=180-0,1\times 180=162$

2. Pour tout entier naturel n.

$u_{n+1}=u_n-\frac{10}{100}u_n=u_n-0,1\,u_n=0,9\times u_n$.

(u_n) est la suite géométrique de premier terme $u_0=200$ et de raison $q=0,9$.

$u_n=u_0\times q^n=200\times 0,9^n$.

3. $u_{12}=200\times 0,9^{12}=56,49\,€$ (arrondi au centième).

4.

```
def seuil(x):
    u=200
    n=0
    while u>=x:
        u= u*0.9
        n= n+1
    return n
```

5. Si on exécute le programme pour seuil(100) on obtient : 7 .
Il faut donc 7 semaines pour que le prix du manteau soit inférieur à 100€.
En utilisant la calculatrice :
$u_6=106,29$ $\qquad u_7=95,66$.

EXERCICE 3 (5 points)

Afin d'établir les liens entre le surpoids et l'alimentation, on interroge les enfants des écoles primaires d'une ville.
L'enquête révèle que 60 % des enfants boivent une boisson sucrée ou plus par jour.
Parmi les enfants buvant une boisson sucrée ou plus par jour, un enfant sur 8 est en surpoids contre seulement 8 % pour les enfant buvant moins d'une boisson sucrée par jour.
On choisit un enfant au hasard parmi les enfants des écoles primaires de la ville et on considère les événements suivants :
B : « l'enfant boit un boisson sucrée ou plus par jour »,
S : « l'enfant est en surpoids ».
Les événements contraires de B et de S sont notés respectivement $\bar{\mathrm{B}}$ et $\bar{\mathrm{S}}$.
Pour tous événements A et B avec B un événement de probabilité non nulle, la probabilité de A sachant B et notée $\mathrm{P_B}(\mathrm{A})$.

1. Justifier que $\mathrm{P_B}(\mathrm{S})=0{,}125$.

2. Représenter la situation par un arbre pondéré.

3. Calculer $\mathrm{P}(\mathrm{B}\cap\mathrm{S})$.

4. Déterminer la probabilité que l'enfant soit en surpoids.

5. On a choisi un enfant en surpoids. Quelle est la probabilité qu'il boive une boisson sucrée ou plus jour ?
On arrondira le résultat au millième.

CORRECTION

1. Parmi es enfants buvant une boisson sucrée ou plus par jour, un ebfant sur 8 est en surpoids donc :

$P_B(S)=\frac{1}{8}=0,125$.

2. 60 % des enfants boivent une boisson sucrée ou plus par jour donc

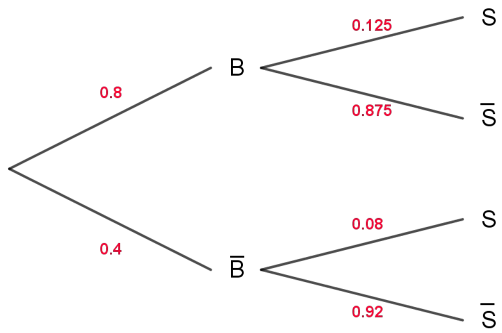
$P(B)=0,6$ et $P(\bar{B})=1-0,6=0,4$. $P_{\bar{B}}(\bar{S})=1-0,08=0,92$

. $P_B(S)=0,125$ et $P_B(\bar{S})=10,125=0,875$.

. 8 % des enfants buvant moins d'une boisson sucrée par jour, sont en surpoids donc :

$P_{\bar{B}}(S)=0,08$ et $P_{\bar{B}}(\bar{S})=1-0,08=0,92$.

. On obtient l'arbre pondéré suivant :



3. $P(B\cap S)=P(B)\times P_B(S)=0,6\times 0,125=0,075$.

4. En utilisant l'arbre pondéré ou le théorème des probabilités totales :

$P(S)=P(B\cap S)+P(\bar{B}\cap S)=0,075+P(\bar{B})\times P_{\bar{B}}(S)=0,075+0,4\times 0,08$

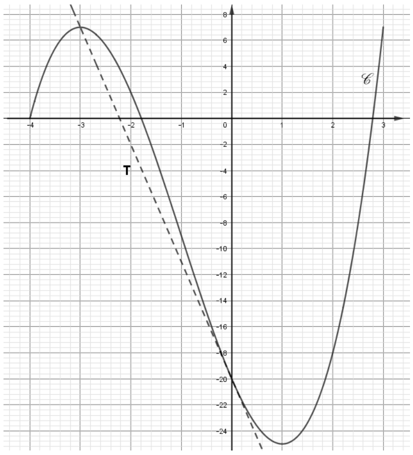
$P(S)=0,075+0,032=0,107$.

5. On nous demande de calculer $P_S(B)$

$P_S(B)=\frac{P(B\cap S)}{P(S)}=\frac{0,075}{0,107}=\frac{75}{107}=0,701$.

EXERCICE 4 (5 points)

On considère la fonction f définie sur l'intervalle [-4;3] par :
$f(x)=x^3+3x^2-9x-20$.
On admet que la fonction f est dérivable sur [-4;3] et on note f' sa fonction dérivée.
La courbe représentative de la fonction f, notée $\mathscr{C}$ est tracée dans unrepère ci-dessous.
La droite T tracée dans le repère est la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.



1. Déterminer graphiquement les extrema de la fonction f.

2. Déterminer l'expression de $f'(x)$ sur [-4;3].

3. Étudier le signe de $3x^2+6x-9$ en fonction de x sur [-4;3].

4. En déduire le tableau de variation de f sur [-4;3] et retrouver les résultats du 1.

5. Déterminer l'équation réduite de la droite T, tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

CORRECTION

1. $f(-3)=7$ et $f(3)=7$ sont **les maxima** de f sur [-4;3].
   $f(1)=-25$ est le minimum de f sur [-4;3].

2. $f(x)=x^3+3x^2-9x-20$
   f est dérivable sur [-4;3].
   $f'(x)=3x^2+6x-9$

3. $\Delta=(-6)^2-4\times(-3)\times(-9)=36+108=144=12^2$
   $x_1=\frac{-6-12}{2\times3}=-3$ $\qquad x_2=\frac{-6+12}{2\times3}=1$
   Le coefficient de x^2 est positif donc on donne le signe de $3x^2+6x-9$ sous la forme d'un tableau.

x	$-\infty$	-4		-3		1		3	$+\infty$
$3x^2+6x-9$	//////		+	0	−	0	+		//////

4.

x	-4		-3		1		3
f '(x)		+	0	−	0	+	
f(x)	0	↗	7	↘	-25	↗	7

f(-3)=f(3)=7 et f(1)=-25

5. $f(0)=-20$ et $f'(0)=-9$
   T : y=-9x-20
   Remarque :
   La droite T passe par le point A(-3:7).