Sujet 38

EXERCICE 1 (5 points)

Cet exercice est un QCM et comprend cinq questions.
Pour chacune des questions, une seule des quatre réponses proposées est correcte.
Les questions sont indépendantes.
Pour chaque question, indiquer le numéro de la question et recopier la lettre correspondant à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée, mais il peut être nécessaire d'effectuer des recherches au brouillon pour aider à déterminer votre réponse.
Chaque réponse correcte rapporte un point. Une réponse incorrecte ou une question sans réponse n'apporte ni ne retire aucun point.

1. L'inéquation $-3(x-2)(x+1)>0$ admet pour ensemble de solutions :

a) [-1,2]	b)]-∞;-1]∪[2;+∞[	c)]-1;2[	d)]-∞:-1[∪}2;+∞[

2. Soit x un nombre réel, le réel $\cos(x+3\pi)$ est égal à :

a) cosx	b) -cosx	c) sinx	d) -sinx

3. Dans un repère orthonormé,on considère la droite d passant par le point A(1;2) et dont un vecteur normal est le vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$. Une équation de la droite d est :

a) 2x+3y-8=0	b) x+2y+4=0	c) 2x-3y-4=0	d) $y=\frac{2}{3}x+\frac{4}{3}$

4. On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=\frac{x^2}{x+1}$.

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative sur $[0;+\infty[$.
Le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1 est :

a) $\frac{1}{2}$	b) $\frac{3}{4}$	c) $\frac{3}{2}$	d) 2

5. L'ensemble des points M(x;y) dont les coordonnées vérifient l'équation : $x^2-2x+y^2+4y=4$ est :

a) une droite	b) le cerle de centre A(1;-2) et de rayon 3	c) le cercle de centre B(-1;2) et de rayon 9	d) l'ensemble vide

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

CORRECTION

1. Réponse : c

Preuve non demandée

$T(x)=-3(x-2)(x+1)$ Les racines du trinôme sont -1 et 2 et le coefficient de x^2 est négatif.

$T(x)>0 \quad \Leftrightarrow \quad -1<x<2$

2. Réponse : b

Preuve non demandée

$\cos(x+3\pi)=\cos(x+\pi+2\pi)=\cos(x+\pi)=-\cos(x)$

3. Réponse : d

Preuve non demandée

a. $2x+3y-8=0$ vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ $\vec{n}\neq\vec{v}$

b. $x+2y+4=0$ A(1;2) $1+2\times2+4=9\neq0$

c. $2x-3y-4=0$ A(1:2) $2\times1-3\times2-4=-8\neq0$

d. $y=\frac{2}{3}x+\frac{4}{3}$ vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\\frac{2}{3}\end{pmatrix}$

$\vec{u}.\vec{v}=1\times2+\frac{2}{3}\times(-3)=2-2=0$ **$\vec{v}$ est un vecteur normal à la droite d'équation $y=\frac{2}{3}x+\frac{4}{3}$.**

A(1:2) $\frac{2}{3}\times1+\frac{}{3}=\frac{6}{3}=2$ **A appartient à la droite d'équation $y=\frac{2}{3}x+\frac{4}{3}$.**

4. Réponse : b

Preuve non demandée

f est dérivable sur $[0;+\infty[$ $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'\times v-u\times v'}{v^2}$

$u(x)=x^2$ $u'(x)=2x$ $v(x)=x+1$ $v'(x)=1$

$f'(x)=\frac{2x\times(x+1)-x^2\times1}{(x+1)^2}=\frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$

Le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1 est $f'(1)=\frac{1^2+2\times1}{(1+1)^2}=\frac{3}{4}$.

5. Réponse : b

Preuve non demandée

$x^2-2x+y^2+4y=4 \quad \Leftrightarrow \quad (x-1)^2-1+(y+2)^2-4=4 \quad \Leftrightarrow \quad (x-1)^2+(y+2)^2=9=3^2$

Équation du cercle de centre A(1 ;-2) et de rayon 3.

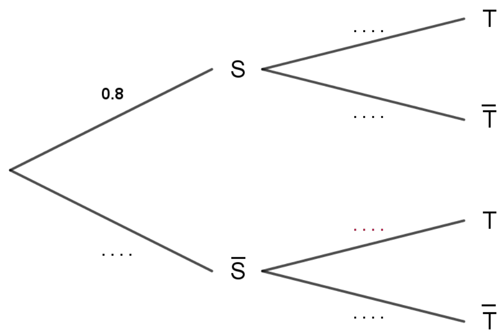
Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

EXERCICE 2 (5 points)

Un snack propose deux types de plats de sandwichs et des pizzas.
Le snack propose également plusieurs desserts.
La gérante constate que 80 % des clients qui achètent un plat choisissent un sandwich et parmi ceux-ci 30 % achètent un dessert.
Elle constate aussi que 45 % des clients qui ont choisi une pizza comme plat ne prennent pas de dessert.

On choisit au hasard un client ayant acheté un plat dans ce snack.
On considère les événements suivants :
S : « Le client interrogé a choisi un sandwich ».
T : « Le client interrogé a choisi un dessert ».

1. Recopier puis compléter l'arbre pondéré suivant.



2. Calculer la probabilité que le client ait choisi un sandwich et un dessert.

3. Démontrer que $P(T)=0{,}35$.

4. Sachant que le client a acheté un dessert, quelle est la probabilité, arrondie à 0,01 , qu'il ait acheté une pizza.

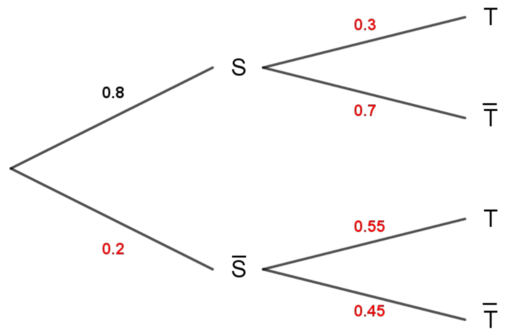
5. Les événements S et T sont-ils indépendants ?

.

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

1. $P(S)=0{,}8$ donc $P(\bar{S})=1-P(S)=1-0{,}8=0{,}2$.

- La gérante constate que 30 % des clients ayant choisi un sandwich prennent également un dessert.
  Donc $P_S(T)=0{,}3$ et $P_S(\bar{T})=1-P_S(T)=1-0{,}3=0{,}7$.
- La gérante constate que 45 % des clients ayant choisi une pizza comme plat ne prennent pas de dessert.
  Donc $P_{\bar{S}}(\bar{T})=0{,}45$ et $P_{\bar{S}}(T)=1-P_{\bar{S}}(\bar{T})=1-0{,}45=0{,}55$.
- On obtient l'arbre pondéré suivant :



2. $P(S\cap T)=P(S)\times P_S(T)=0{,}8\times 0{,}3=0{,}24$.

3. En utilisant l'arbre pondéré ou le théorème des probabilités totales.
$P(T)=P(S\cap T)+P(\bar{S}\cap T)=0{,}24+P(\bar{S})\times P_{\bar{S}}(\bar{T})=0{,}24+0{,}2\times 0{,}55=0{,}24+0{,}11=0{,}35$

4. On nous demande de calculer $P_T(\bar{S})$.
$P_T(\bar{S})=\dfrac{P(T\cap\bar{S})}{P(T)}=\dfrac{0{,}11}{0{,}35}=\dfrac{11}{35}=0{,}31$.

5. $P(S\cap T)=0{,}24$
$P(S)\times P(T)=0{,}8\times 0{,}35=0{,}28$
$P(S\cap T)\neq P(S)\times P(T)$
Les événements S et T ne sont pas indépendants.

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

EXERCICE 3 (5 points)

Devant participer à une course de 150 km, un cycliste prévoit l'entraînement suivant :

- parcourir 30 km la première semaine
- chaque semaine qui suit augmenter la distance parcourue de 9 % par rapport à celle parcourue la semaine précédente.

On modélise la distance parcourue chaque semaine à l'entraînement par la suite (d_n) où d_n représente la distance parcourue pendant la $n^{\text{ième}}$ semaine d'entraînement.
On a ainsi $d_1=30$.

1. Prouver que $d_3=35{,}643$.

2. Quelle est la nature de la suite (d_n) ? Justifier.

3. En déduire l'expression de d_n en fonction de n.

4. On considère la fonction définie de façon suivante en langage Python.

```
def distance(k):
  d=30
  n=1
  while d<=k:
    d=d*1.09
    n=n+1
  return n
```

Quelle information est obtenue par le calcul distance(150) ?

5. Calculer la distance totale par courue par le cycliste pendant les 20 premières semaines d'entraînement.

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

CORRECTION

1. Chaque semaine le cycliste augmente la distance d'entraînement de 9 %.

$d_1=30 \qquad d_2=d_1+\frac{9}{100}\times d_1=30+\frac{9}{100}\times 30=30+2,7=32,7$

$d_2=d_1+\frac{9}{100}\times d_2=32,7+\frac{9}{100}\times 32,7=32,7+2,943=35,643$

2. Pour tout entier naturel non nul, $d_{n+1}=d_n+\frac{9}{100}\times d_n=d_n+0,09\,d_n=1,09\,d_n$

(d_n) est la suite géométrique de raison $q=1,09$ et de premier terme $d_1=30$.

3. Pour tout entier naturel n, $d_n=d_1\times q^{n-1}=30\times 1,09^{n-1}$.

4. distance(150) donne le nombre de semaines nécessaires pour que le cycliste parcourt pour la première fois une distance d'entraînement supérieure à 150 km.

Remarque

Si on exécute ce programme pour distance(150), on obtient **n=20.**

En utilisantla calculatrice, on obtient :

$d_{20}=30\times 1,09^{19}=154,250\text{ km}$ (arrondi au mètre) et $d_{19}=30\times 1,09^{18}=141,514\text{ km}$

5. On nous demande de calculer les 20 premiers termes de la suite géométrique (d_n).

$S=d_1+d_2+\ldots+d_{20} \qquad 1,09\times S=\ d_2+d_3+\ldots+d_{21} \qquad 1,09\times S-S=d_{21}-d_1$

$0,09\times S=30\times 1,09^{20}-30$

$S=\frac{30\times 1,09^{20}-30}{0,09}=1534,804\text{ km}$ (arrondi au mètre).

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

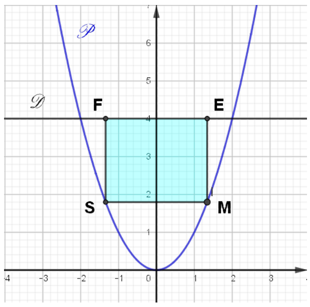
EXERCICE 4 (5 points)

1. Soit f la fonction définie sur l'intervalle [0;2] par $f(x)=8x-2x^3$.

1.a. Montrer que pour tout réel x de [0;2], $f'(x)$ a le même signe que $4-3x^2$.

1.b. Étudier les variations de f sur [0:2].

2. Dans un repère orthonormé, on considère la parabole $\mathscr{P}$ d'équation $y=x^2$ et la droite $\mathscr{D}$ d'équation : y=4.
On considère le rectangle MSFE tel que :
. M est un point de $\mathscr{P}$ dont l'abscisse est un réel de l'intervalle]0;2[.
. S est le symétrique de M par rapport à l'axe des ordonnées
. E et F sont respectivement les projetés orthogonaux de M et S sur la droite $\mathscr{D}$.



2.a. Lorsque l'abscisse x du point M varie dans]0;2[, l'aire du rectangle est-elle constante ?

2.b. Montrer que l'aire du rectangle MSFE en fonction de l'abscisse x de M est $8x-2x^3$.

2.c. Montrer que l'aire maximale du rectangle MSFE est $\frac{32}{3\sqrt{3}}$.

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

CORRECTION

1.a. Pour tout réel x de [0;2], $f(x)=8x-2x^3$.
f est dérivable sur [0;2].
$f'(x)=8-6x^2=2(4-3x^2)$.
Sur [0;2] le signe de $f'(x)$ est le même que le signe de $4-3x^2$.

1.b. $T(x)=4-3x^2=(2-\sqrt{3}x)(2+\sqrt{3}x)$

$2-\sqrt{3}x=0 \Leftrightarrow x=\frac{2}{\sqrt{3}}$ $\quad$ $2+\sqrt{3}x=0 \Leftrightarrow x=-\frac{2}{\sqrt{3}}$

Le coefficient de x^2 est négatif.

x	$-\infty$		$-\frac{2}{\sqrt{3}}$		0		$\frac{2}{\sqrt{3}}$		2		$+\infty$
$4-3x^2$		$-$	0		+		0		$-$		

On donne les variations de f sous la forme d'un tableau.

x	0		$\frac{2}{\sqrt{3}}$		2
f '(x)		$-$	0	+	
f(x)	0	↗	$\frac{32}{3\sqrt{3}}$	↘	0

$f(0)=0 \quad f(2)=0 \quad f\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)=8\times\frac{2}{\sqrt{3}}-2\times\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3=\frac{16}{\sqrt{3}}-2\times\frac{8}{3\sqrt{3}}=\frac{48-16}{3\sqrt{3}}=\frac{32}{3\sqrt{3}}$

2.a. Pour $x=1$ on a $x^2=1$ $\quad$ M(1;1) $\quad$ S(-1;1) $\quad$ E(1;4) $\quad$ F(-1;4)
SM=2 $\quad$ EM=3 $\quad$ l'aire du rectangle MSFE est $2\times3=6$.
Pour $x=0{,}5$ on a $x^2=0{,}25$ $\quad$ M(0,5;0,25) $\quad$ S(-0,5;0,25) $\quad$ E(0,5;4) $\quad$ F(-0,5;4)
SM=1 $\quad$ EM==3,75 $\quad$ l'aire du rectangle MSFE est $1\times3{,}75=3{,}75$.
<u>Conclusion</u>
L'aire du rectangle MSFE n'est pas constante.

2.b. $0<x<2$ $\quad$ $M(x;x^2)$ $\quad$ $S(-x;x^2)$ $\quad$ $E(x;4)$ $\quad$ $F(-x;x^2)$
SM=2x $\quad$ $EM=4-x^2$ $\quad$ l'aire du rectangle MSFE est $2x\times(4-x^2)=8x-4x^2=f(x)$;

2.c. Nous avons vu que le maximum de f est $f\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)=\frac{32}{3\sqrt{3}}$.

<u>Conclusion</u>
L'aire maximale du rectangle MSFE est $\frac{32}{3\sqrt{3}}$.

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés