Sujet 39

EXERCICE 1 (5 points)

Cet exercice est un QCM et comprend cinq questions.
Pour chacune des questions, une seule des quatre réponses proposées est correcte.
Les questions sont indépendantes.
Pour chaque question, indiquer le numéro de la question et recopier la lettre correspondant à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée, mais il peut être nécessaire d'effectuer des recherches au brouillon pour aider à déterminer votre réponse.
Chaque réponse correcte rapporte un point. Une réponse incorrecte ou une question sans réponse n'apporte ni ne retire aucun point.

1. Pour tout réel x, $\cos(25\pi + x)$ est égal à :

a) cos(x)	b) -cos(x)	c) cos(-x)	d) -1

2. On considère la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle [-10;10].
On donne ci-dessous le tableau de variation de la fonction f.

X	-10		2		3		10
f '(x)			0		0		
f(x)	0	↘	-5	↗	4	↘	3

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.
La tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 3 a pour coefficient directeur :

a) 0	b) 3	c) 4	d) 10

3. E et F sont deux événements indépendants du même univers.
On sait que P(E)=0,4 et P(F)=0,3 alors :

a) P(E∪F)=0.7	b) P(E∩F)=1.2	c) P(E∩F)=0	d) P(E∩F)=0.12

4. L'ensemble des solutions de l'inéquation : $-3x^2+11x+1 \leqslant -3$ est

a) $\left\{-\frac{1}{3}; 4\right\}$	b) $[-\frac{1}{3} : 4]$	c) $]-\infty : -\frac{1}{3}] \cup [4; +\infty[$	d) $]-\infty; -\frac{1}{3}[\cup]4; +\infty[$

5. La loi de probabilité d'une variable aléatoire X est donnée par ce tableau :

x_i	-3	2	5	10
$P(X = x_i)$	0.3	0.21	0.13	0.36

On peut en déduire que

a) P(X>2)=0.49	b) P(X>2)=0.51	c) P(X≥2)=0.49	d) P(X≥2)=0.51

CORRECTION

1. **Réponse : b**
   Preuve non demandée
   $\cos(25\pi+x)=\cos(\pi+x+12\times2\pi)=\cos(\pi+x)=-\cos(x)$

2. **Réponse : a**
   Preuve non demandée
   Le tableau de variation donne $f'(3)=0$ qui est le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 3.

3. **Réponse : d**
   Preuve non demandée
   Les événements E et F sont indépendants donc $P(E\cap F)=P(E)\times P(F)=0{,}4+0{,}3=0{,}12$.
   Remarque : $P(E\cup F)=P(E)+P(F)-P(E\cap F)=0{,}3+0{,}4-0{,}12=0{,}58$.

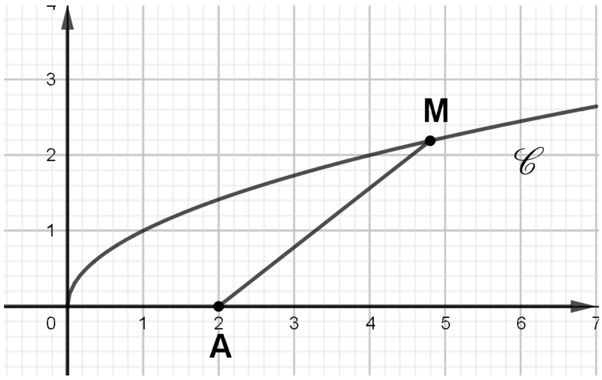
4. **Réponse : c**
   Preuve non demandée
   $-3x^2+11x+1\leqslant-3 \quad\Leftrightarrow\quad -3x^2+11x+4\leqslant0$
   $\Delta=11^2-4\times(-3)\times4=121+48=169=13^2$
   $x_1=\frac{-11-13}{-6}=\frac{24}{6}=4 \qquad x_2=\frac{-11+13}{-6}=-\frac{2}{6}=-\frac{1}{3}$
   Le coefficient de x^2 est négatif donc l'ensemble des solutions de l'inéquation est :
   $S=\left]-\infty;-\frac{1}{3}\right]\cup[4;+\infty[$.

5. **Réponse : a**
   Preuve non demandée
   $P(X>2)=P(X=5)+P(X=10)=0{,}13+0{,}36=0{,}49$.
   $P(X\geqslant2)=P(X=5)+P(X=10)+P(X=2)=0{,}13+036+021=0{,}7$.

EXERCICE 2 (5 points)

1. Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par $f(x)=x^2-3x+4$.
Étudier les variations de f sur $[0;+\infty[$.

2. Dans un repère orthonormé, on considère, on considère la courbe $\mathscr{C}$ représentant la fonction racine carrée et le point A(2;0).



2.a. Soit M(x;y) un point de $\mathscr{C}$. Exprimer y en fonction de x.

2.b. Démontrer que : $AM^2=x^2-3x+4$.

2.c. Déterminer les coordonnées du point de $\mathscr{C}$ le plus proche de A.
Ce point est noté B par la suite.

2.d. Un élève affirme que la tangente en B à $\mathscr{C}$ est perpendiculaire au segment [AB].
A-t-il raison ? Justifier.

CORRECTION

1. x appartient à l'intervalle $[0;+\infty[$, $f(x)=x^2-3x4$.
f est dérivable sur $[0;+\infty[$ et $f'(x)=2x-3$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=\frac{3}{2}=1,5$ $\quad f'(x)>0 \Leftrightarrow x>\frac{3}{2}=1,5$ $\quad f'(x)<0 \Leftrightarrow 0\leqslant x<\frac{3}{2}=1,5$;

On donne les variations de f sous la forme d'un tableau.

x	0		1.5		+∞
f '(x)		−	0	+	
f(x)	4	↘	1.75	↗	

$f(1,5)=1,5^2-4,5+4=2,25-0,5=1,75$.

2.a. $\mathscr{C}$ est la courbe représentative de la fonction racine carrée donc si M(x;y)) appartient à $\mathscr{C}$ alors $y=\sqrt{x}$.

2.b. A(2;0) $\quad M(x;\sqrt{x})$ $\quad \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x-2 \\ \sqrt{x}-0 \end{pmatrix}$

$AM^2=(x-2)^2+(\sqrt{x})^2=x^2-4x+4+x=x^2-3x+4=f(x)$.

2.c. La distance AM est minimale si et seulement si AM^2 est minimal.
Or f(x) admet un minimum pour x=1,5.
B appartient à la courbe $\mathscr{C}$ donc $y_B=\sqrt{1,5}$.
$B(1,5;\sqrt{1,5})$

2.d. $\mathscr{C}$ est la courbe représentative sur $[0;+\infty[$ de la fonction g définie par $g(x)=\sqrt{x}$.
g est dérivable sur $]0;+\infty[$ et $g'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point B est $g'(1,5)=\frac{1}{2\sqrt{1,5}}$ et le vecteur

$\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2\sqrt{1,5}} \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de cette tangente.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -0,5 \\ \sqrt{1,5} \end{pmatrix}$

$\vec{u}.\overrightarrow{AB}=-0,5\times 1+\sqrt{1,5}\times\frac{1}{2\sqrt{1,5}}=-0,5+\frac{1}{2}=0$.

Donc l'élève a raison d'affirmer que la tangente à $\mathscr{C}$ au point B est perpendiculaire au segment [AB].

EXERCICE 3 (5 points)

Une balle est lâchée de 3 mètres au-dessus du sol. Elle touche le sol et rebondit. À chaque rebond elle perd 25 % de sa hauteur précédente.
On modélise la hauteur de la balle par une suite (h_n) où h_n désigne la hauteur maximale dela balle, en mètre, après le $n^{\text{ième}}$ rebond. On a donc $h_0=3$.

1. Calculer h_1 et h_2.

2. La suite (h_n) est-elle arithmétique ? Justifier.

3. Donner la nature de la suite (h_n) en précisant ses éléments caractéristiques.

4. Déterminer la hauteur, arrondie au centimètre, de la balle après 6 rebonds.

5. La fonction « seuil » est définie en langage Python

```
1  def seuil():
2     h=3
3     n=0
4     while . . . . . . . . :
5        h= . . . . . .
6        n=n+1
7     return n
```

Recopier et compléter les lignes 4 et 5 pour que cette fonction renvoie le nombre de rebonds à partir du quel la hauteur maximale sera inférieure ou égale à 10 centimètres.

CORRECTION

1. À chaque rebond la balle perd 25 % de sa hauteur précédente.

$h_1 = h_0 - \dfrac{25}{100} \times h_0 = h_0 - 0{,}25 \times h_0 = (1 - 0{,}25) \times h_0 = 0{,}75 \times h_0 = 0{,}75 \times 3 = 2{,}25$.

$h_2 = 0{,}75 \times h_1 = 0{,}75 \times 2{,}25 = 1{,}6875$.

2. $h_1 - h_0 = -0{,}75$ $\quad$ $h_2 - h_0 = 1{,}6875 - 2{,}25 = -0{,}5625$

$h_1 - h_0 \neq h_2 - h_1$.

La suite (h_n) n'est pas une suite arithmétique.

3. Pour tout entier naturel n.

$h_{n+1} = h_n - \dfrac{25}{100} \times h_n = h_n - 0{,}25 \times h_n = (1 - 0{,}25) \times h_n = 0{,}75 \times h_n$

donc **(h_n) est la suite géométrique de raison $q = 0{,}75$ et de premier terme $h_0 = 3$.**

4. Pour tout entier naturel n $\quad h_n = h_0 \times q^n = 3 \times 0{,}75^n$

La hauteur de la balle après 6 rebonds est : h_6

$h_6 = 3 \times 0{,}75^6 = 0{,}53$ m (arrondi au centimètre)

5.

```
def seuil():
    h=3
    n=0
    while h>0.1 :
        h= h*0.75
        n=n+1
    return n
```

Remarques :

. 10cm est égal à 0,1m

. Si on exécute le programme on obtient $n=12$

$h_1 = 3 \times 0{,}75^n = 0{,}095$ (arrondi au millième).

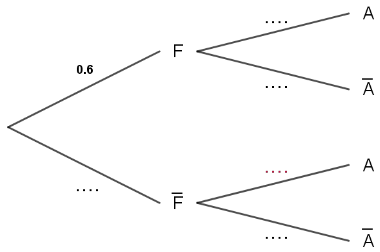
EXERCICE 4 (5 points)

Une enquête réalisée dans un camping a donné les résultats suivants :

. 60 % des campeurs viennent en famille, les autres viennent entre amis.
. Parmi ceux venant en famille 35 % profitent des activités du camping.
. Parmi ceux venant entre amis 70 % ne profitent pas des activités du camping.

On choisit au hasard un client du camping et on considère les événements suivants :
F : « le campeur choisi est venu en famille »
A : « le campeur choisi profite des activités du camping ».

1. Recopier et compléter l'arbre des probabilités ci-dessous :



2.a. Calculer $P(F \cap \overline{A})$.

2.b. Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

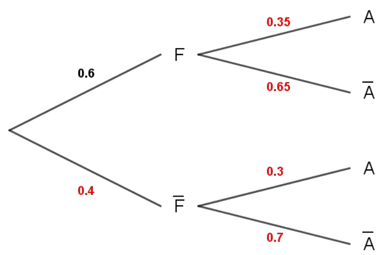
3. Montrer que $P(A)=0,33$.

4. Sachant que le campeur choisi a profité des activités du camping, calculer la probabilité qu'il soit venu en famille.
Arrondir le résultat au centième.

CORRECTION

1. $P(\bar{F})=1-P(F)=10{,}6=0{,}4$.

- Parmi les campeurs venant en famille, 35% profitent des activités du camping, donc :
  $P_F(A)=0{,}35$ et $P_F(\bar{A})=1-0{,}35=0{,}65$.
- Parmi les campeurs venant entre amis, 70 % ne profitent pas des activités du camping, donc :
  $P_{\bar{F}}(\bar{A})=0{,}7$ et $P_{\bar{F}}(A)=1-0{,}7=0{,}3$.



2.a. $P(F\cap\bar{A})=P(F)\times P_F(A)=0{,}6\times0{,}65=0{,}39$.

2.b. **39 % des campeurs viennent en famille et ne profitent pas des activités du camping.**

3. En utilisant l'arbre pondéré ou le théorème des probabilités totales.
$P(A)=P(F\cap A)+P(\bar{F}\cap A)=P(F)\times P_F(A)+P(\bar{F})\times P_{\bar{F}}(A)=0{,}6\times0{,}35+0{,}4\times0{,}3=0{,}21+0{,}12=0{,}33$.

4. On nous demande de calculer $P_A(F)$.
$P_A(F)=\dfrac{P(A\cap F)}{P(A)}=\dfrac{0{,}21}{0{,}33}=\dfrac{21}{33}=0{,}64$ (arrondi au centième).

