Sujet 4

EXERCICE 1 (5 points)

Cet exercice est un QCM et comprend cinq questions.
Pour chacune des questions, une seule des quatre réponses proposées est correcte.
Les questions sont indépendantes.
Pour chaque question, indiquer le numéro de la question et recopier la lettre correspondant à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée, mais il peut être nécessaire d'effectuer des recherches au brouillon pour aider à déterminer votre réponse.
Chaque réponse correcte rapporte un point. Une réponse incorrecte ou une question sans réponse n'apporte ni ne retire aucun point.

Question 1
Dans un repère orthonormé, on considère les points A(4;2) ; B(2;6). Une équation de la médiatrice du segment [AB] est :

a) x=3	b) x-2y+5=0	c) x+2y-11=0	d) y=0.5x+3

Question 2
On donne deux points P et N tels que PN=6. L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MP}.\overrightarrow{MN}=0$ est :

a la droite (PN)	b le cercle de diamètre [PN]	c le cercle de rayon 6	d le milieu du segment [PN]

Question 3
Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=x^3-4x+5$. Une équation de la tangente à la courbe représentative de g dans un repère orthonormé au point d'abscisse -1 est :

a) y=8x+7	b) y=-7x+1	c) y=-4x+5	d) y=-x+7

Question 4
L'axe de symétrie de la parabole d'équation $y=x^2+x+3$ est :

a) y=x	b) y=-0.5x	c) y=-0.5	d) x=-0.5

Question 5
L'inéquation $-3e^{x+2}>-3e^4$, d'inconnue x apour ensemble de solutions :

a)]-2;+∞[	b)]2;+∞[	c)]-∞;2[	d)]-∞;-2[

CORRECTION

Question1 Réponse : b

Preuve non demandée

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à la médiatrice (Δ) de [AB]. $I(3;4)$ est le milieu [AB].

$M(x;y)$ $\overrightarrow{IM}\begin{pmatrix}x-3\\y-4\end{pmatrix}$

$M(x;y)$ appartient à la médiatrice (Δ) de [AB] $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{IM}=0$ $\Leftrightarrow$ $-2\times(x-3)+4\times(y-4)=0$

$\Leftrightarrow$ $-2x+6+4y-16=0$ $\Leftrightarrow$ $-2x+4y-10=0$ $\Leftrightarrow$ $x-2y+5=0$

Autre méthode :

M appartient à la médiatrice (Δ) du segment [AB] si et seulement si $AM=BM$.

$M(x;y)$; $A(4;2)$ et $B(2;6)$ $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-4\\y-2\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix}x-2\\y-6\end{pmatrix}$.

$AM^2=(x-4)^2+(y-2)^2$ $BM^2=(x-2)^2+(y-6)^2$

$AM=BM$ $\Leftrightarrow$ $AM^2=BM^2$ $\Leftrightarrow$ $x^2-8x+16+y^2-4y+4=x^2-4x+4+y^2-12y+36$

$\Leftrightarrow$ $-4x+8y-20=0$ $\Leftrightarrow$ $x-2y+5=0$

Question 2 Réponse : b

Preuve non demandée

$\overrightarrow{MP}.\overrightarrow{MN}=0$ $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{MP}$ et $\overrightarrow{MN}$ sont orthogonaux $\Leftrightarrow$ Le triangle PMN est rectangle en M

$\Leftrightarrow$ M appartient au cercle de diamètre [PN].

Question 3 Réponse : d

Preuve non demandée

$g(x)=x^3-4x+5$ $g(-1)=(-1)^3-4\times(-1)+5=-1+4-5=8$ $A(-1;8)$

$g'(x)=3x^2-4$ $g'(-1)=3\times(-1)^2-4=3-4=-1$

(T) est la tangente à la courbe représentative de g au point A(-1;8).

(T) est la ddroite passant par A et de coefficient directeur -1. $(T):$ $y=-x+b$ $8=1+b$ $\Leftrightarrow$ $b=7$

$(T):$ $y=-x+7$

Question 4 Réponse : c

Preuve non demandée

$y=x^2+x+3=(x+0{,}5)^2-0{,}25+3=(x+0{,}5)^2+2{,}75$

L'axe de la parabole d'équation $y=x^2+x+3$ est : x=-0,5.

Question 5 Réponse : c

Preuve non demandée

La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc :

$-3e^{x+2}>-3e^4$ $\Leftrightarrow$ $e^{x+2}<e^4$ $\Leftrightarrow$ $x+2<4$ $\Leftrightarrow$ $x<2$ $\Leftrightarrow$ $x\in]-\infty;2[$

EXERCICE 2 (5 points)

Partie A

(U_n) est une suite géométrique de premier terme $U_0=25000$ et de raison 0,94.
(V_n) est une suite définie par : $V_n=50(104+25n)$ pour tout entier naturel n.

1. Déterminer une forme explicite de la suite (U_n).

2. Calculer la somme des sept premiers termes de la suite (U_n).

3. Comparer les termes U_0 et V_0 puis U_{20} et V_{20}.

4. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $U_n<V_n$.

Partie B

Un concessionnaire de voitures propose des voitures équipées d'un moteur diesel ou d'un moteur essence. Durant sa première année d'existence en 1995, il a vendu 25000 véhicules avec un moteur diesel et 5200 véhicules avec un moteur essence.
Ses ventes de véhicules avec un moteur diesel ont diminué de 6 % chaque année, alors que ses ventes de voitures avec un moteur essence ont augmenté de 1250 unités tous les ans.

En quelle année les ventes de voitures avec un moteur essence ont-elles dépassé les ventes avec un moteur diesel ?

CORRECTION

Partie A

1. Pour tout entier naturel n, $U_0=U_0\times q^n=25000\times 0{,}94^n$.

2. $S=U_0+U_1+\ldots+U_6$ $q\times S=U_1+U_2+\ldots+U_7$ $(1-q)\times S=U_0-U_7$ $S=\dfrac{U_0-U_7}{1-q}$

$U_0-U_7=25000\times(1-0{,}94^7)$ $1-q=1-0{,}94=0{,}06$ $S=25000\times\dfrac{1-0{,}94^7}{0{,}06}=146468$ arrondi à l'unité.

3. $U_0=25000$ $V_0=50\times 104=5200$.
$U_{20}=25000\times 0{,}94^{20}=7253$ arrondi à l'unité $V_{20}=50\times(104+500)=50\times 604=30200$ $U_{20}<V_{20}$.

4. (U_n) est la sute géométrique de 1er terme $U_0=25000$ et de raison $q=0{,}94>0$ donc la suite (U_n) est strictement décroissante.
Pour tout entier naturel n, $V_n=50\times(104+25\,n)=5200+1250\,n$ donc V_n est la suite arithmétique de 1er terme $V_0=5200$ et de raison $r=1250$ donc la suite (V_n) est strictement croissante.

. On peut déterminer le plus petit entier naturel n tel que $U_n<V_n$ en utilisant un programme Python :

```
n=0
U=25000
V=5200
while U>v:
  n=n+1
  U=U*0.94
  V=50*(104+25*n)
print(n)
```

Si on exécute le programme, on obtient $n=9$.
En utilisant la calculatrice, on obtient :
$U_9=14325$ (arrondi à l'unité) $V_9=16450$ $U_8=15239$ (arrondi à l'unité) $V_8=15200$
donc $U_8>V_8$ et $U_9<V_9$;
9 est le plus petit entier naturel n tel que $U_n<V\,n$.

Partie B

Pour tout entier naturel n, on note u_n le nombre de véhicules vendus avec un moteur diesel,
$u_{n+1}=u_n-\dfrac{6}{100}\times u_n=0{,}94\,u_n$ alors (u_n) est la suite géométrique de premier terme $u_0=25000$ et de raison $q=0{,}94$. On pose u_n l'arrondi à l'unité de U_n .
Pour tout entier naturel n, on note v_n le nombre de véhicules vendus avec un moteur à essence $v_{n+1}=v_n+1250$ alors la suite arithmétique de premier terme 5200 et de raison $r=1250$. $U_n=u_n$
En 1995+9=2004 le nombre de véhicules avec un moteur essence ont dépassé le nombre de véhicules avec un moteur diesel.

EXERCICE 3 (5 points)

On dispose d'un paquet de cartes contenant un nombre identique de cartes de la catégorie « Sciences » et de la catégorie « Économie ». Une question liée à un de ces thèmes figure sur chaque carte.

Les cartes sont mélangées et on en tire une au hasard dans le paquet. Ensuite, on essaye de répondre à la question posée.

Un groupe de copains participe à ce jeu. Connaissant leurs points forts et leurs faiblesses,on estime qu'il y a :
. 3 chances sur 4 de donner la bonne réponse lorsqu'il est interrogé en sciences ;
. 1 chance sur 8 de donner la bonne réponse lorsqu'il est interrogé en sciences.

On note S l'événement « La question est dans la catégorie « Sciences » et B l'événement « La réponse donnée par le groupe est bonne ».

Partie A

1. Calculer $P(B\cap S)$.

2. Déterminer la probabilité que le groupe de copains réponde correctement à la question posée.

3. Les événements S et B sont-ils indépendants ?

Partie B

Pour participer à ce jeu, on doit payer 5€ de droit d'inscription.
On recevra :
. 10€ si on est interrogé en sciences et que la réponse est correcte ;
. 30€ si on est interrogé en économie et que la réponse est correcte ;
. rien si laréponse donnée est fausse.

Soit X la variable aléatoire qui, à chaque partie jouée, associe son gain. On appelle gain la différence en euros entre ce qui est reçu et les 5€ de droit d'inscription.

1. Déterminer la loi de probabilité de X.

2. Que retourne la fonction Jeu écrite ci-dessous en langage Python avec les listes :
L=[-5,5,25] et G=[0.5625,0.375,0.0625] ?

```
def Jeu(L,G):
  n=len(L)
  E=0
  for i in range(n):
    E=E+L[i]*G[i]
  return(E)
```

CORRECTION

Partie A

1. L'énoncé précise :
Le paquet de cartes contient un nombre identique de cartes « Sciences » et de cartes « Économie ».
On tire au hasard une carte de paquet donc :
$P(S)=\frac{1}{2}=0{,}5$ de même $P(\bar{S})=1-P(S)=1-0{,}5=0{,}5$.
$\bar{S}$ est l'événement la carte tirée est une carte « Économie ».
Le groupe a 3 chances sur 4 de donner la bonne réponse lorsqu'il est interrogé en « Sciences » donc :
$P_S(B)=\frac{3}{4}=0{,}75$ de même $P_S(\bar{S})=1-P_S(B)=1-0{,}75=0{,}25$.
$P(B\cap S)=P(S\cap B)=P(S)\times P_S(B)=0{,}5\times 0{,}75=0{,}375$

2. Le groupe a 1 chance sur 8 de donner la bonne réponse lorsqu'il est interrogé en « Économie » donc :
$P_{\bar{S}}(B)=\frac{1}{8}=0{,}125$ et $P_{\bar{S}}(\bar{S})=1-P_{\bar{S}}(B)=1-0{,}125=0{,}875$.
En utilisant la formule de probabilités totales.
$P(S)=P(S\cap B)+P(\bar{S}\cap B)=0{,}375+P(\bar{S})\times P_{\bar{S}}(B)=0{,}375+0{,}5\times 0{,}125$
$P(S)=0{,}375+0{,}0625=0{,}4375$.

3. $P(B\cap S)=0{,}375$
$P(B)\times P(S)=0{,}4375\times 0{,}5=0{,}21875$
$P(B\cap S)\neq P(B)\times P(S)$ donc les événements B et S ne sont pas indépendants.

Partie B

1. Si le groupe donne une réponse fausse alors son gain, en euros, est 0-5=-5 ;
Si le groupe donne une bonne réponse en « sciences » alors son gain, en euros, est 10-5=5 ;
Si le groupe donne une bonne réponse en « Économie » alors son gain, en euros, est 30-5=25.
$P(X=-5)=P(\bar{B})=1-P(B)=1-0{,}4375=0{,}5625$.
$P(X=5)=P(B\cap S)=0{,}375$
$P(X=25)=P(B\cap\bar{S})=0{,}0625$.
On peut vérifier que : $0{,}5625+0{,}375+0{,}0625=1$.
On donne la loi de probabilité sous la forme d'un tableau.

x_i	-5	5	25
$P(X=x_i)$	0.5625	0.375	0.0625

2. On remarque que les listes L et G sont les lignes dutableau de la loi de probabilité de X.
L'instruction : n=len(L) donne n=3 (longueur de L).
L'instruction : for i in range(n) précise que l'on effectue 3 boucles successives.
$1^{\text{Ère}}$ boucle : $E=0+(-5)\times 0{,}5625$
$2^{\text{ème}}$ boucle : $E=(-5)\times 0{,}5625+5\times 0{,}375$
$3^{\text{ème}}$ boucle : $E=(-5)\times 0{,}5625+5\times 0{,}375+25\times 0{,}0625$
L'instruction : return(E) précise que la fonction Jeu retourne la valeur de E de la $3^{\text{ème}}$ boucle c'est à dire l'espérance mathématique de X.
Si on exécute le programme ou si on effectue le calcul, on obtient : E(X)=0,625.

EXERCICE 4 (5 points)

On souhaite fabriquer des boîtes de rangement sans couvercle.
Les boîtes auront la forme d'un parallélépipède rectangle de hauteur 16 cm et de base un rectangle ayant pour dimensions x et y exprimés en cm.
Chaque boîte a un volume de $10000\,\text{cm}^3$.

1. Calculer y lorsque $x=20\text{cm}$.

2. Pour toute valeur de $x>0$, on note $f(x)$ l'aire du parallélépipède rectangle.
Démontrer que : pour tout $x>0$ $f(x)=\dfrac{20000}{x}+32x+625$.

3. Quelles dimensions doit-on donner à ces boîtes pour que leur surface ait une aire minimale ?

CORRECTION

1. Le volume du pallélépipède rectangle est égal à : $V = x \times y \times 16$ cm^3 .

Or $V = 10000$ et $x = 20$ donc $10000 = 20 \times 16 \times y$ $y = \dfrac{10000}{20 \times 16} = 31{,}25$ cm .

2. L'aire du parallélépipède est la somme de l'aire du rectangle de base de côtés x et y et de l'aire de deux rectangles de côtés x et 16 et de l'aire de deux côtés y et 16.

$f(x) = xy + 2 \times 16 \times x + 2 \times 16 \times y$

Or $16 \times x \times y = 10000$ donc $xy = \dfrac{10000}{16} = 625$ et $y = \dfrac{10000}{16x}$ donc $2 \times 16 \times y = \dfrac{20000}{x}$.

$f(x) = \dfrac{20000}{x} + 32x + 625$.

3. Pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0;+\infty[$:

$f'(x) = -\dfrac{20000}{x^2} + 32 = \dfrac{-20000 + 32x^2}{x^2} = \dfrac{32(x^2 - 625)}{x^2} = \dfrac{32(x^2 - 25^2)}{x^2} = \dfrac{32(x-25)(x+25)}{x^2}$.

Le signe de $f'(x)$ sur $]0;+\infty[$ est le signe de (x-25).

Variations de f sur $]0;+\infty[$.

x	0		25		$+\infty$
f '(x)		−	0	+	
f(x)		↘	m	↗	

La fonction f admet un minimum pour x=25.

$y = 10000 \times 25 \times 16 = \dfrac{10000}{400} = 25$;

L'aire du parallélépipède est minimale lorsque la base est un carré de côté 25 cm.