## *Sujet 40*

### EXERCICE 1 (5 points)

Cet exercice est un QCM et comprend cinq questions.
Pour chacune des questions, une seule des quatre réponses proposées est correcte.
Les questions sont indépendantes.
Pour chaque question, indiquer le numéro de la question et recopier la lettre correspondant à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée, mais il peut être nécessaire d'effectuer des recherches au brouillon pour aider à déterminer votre réponse.
Chaque réponse correcte rapporte un point. Une réponse incorrecte ou une question sans réponse n'apporte ni ne retire aucun point.

**1.** Pour tout réel x, $\sin(7\pi - x)$ est égal à :

| | | | |
|---|---|---|---|
| a) **sinx** | b) **-sinx** | c) **cosx** | d) **-cosx** |

**2.** Dans laquelle des quatre situations proposées ci-dessous le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ est égal à 6 ?

| | | | |
|---|---|---|---|
| a) ABC est un triangle tel que AB=6, AC=4 et BC=8 | b) Dans un repère orthonormé du plan A(-2;5); B(2,2) et C(1;7) | c) ABC est un triangle rectangle en B tel que AB=3 et BC=2 | d) ABC est un triangle tel que AB=6 AC=4 et $\widehat{BAC}=30°$ |

**3.** On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\frac{3x+4}{x^2+1}$.
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout x, $f'(x)$ est égal à :

| | | | |
|---|---|---|---|
| a) $\frac{3}{2x}$ | b) $\frac{9x^2+8x+3}{(x^2+1)^2}$ | c) $\frac{-3x^2-8x+3}{(x^2+1)^2}$ | d) $9x^2+8x+3$ |

**4.** Le plan est rapporté à un repère orthonormé.
L'ensemble des points M(x;y) tels que : $x^2+y^2-10x+6y+30=0$.

| | | | |
|---|---|---|---|
| a) une droite | b) une parabole | c) un cercle | d) ni une droite ni une parabole ni un cercle |

**5.** La somme $1+5+5^2+\ldots+5^{30}$ est égale à :

| | | | |
|---|---|---|---|
| a) $\frac{1-5^{30}}{4}$ | b) $\frac{5^{30}-1}{4}$ | c) $\frac{1-5^{31}}{4}$ | d) $\frac{5^{31}-1}{4}$ |

## CORRECTION

**1. Réponse : a**

*Preuve non demandée*

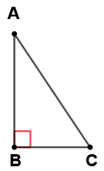
$\sin(7\pi - x) = \sin(\pi - x + 3\times 2\pi) = \sin(\pi - x) = \sin x$

**2. Réponse : b**

*Preuve non demandée*

- $BC^2 = 8^2 = 64 = \overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})^2 = \overrightarrow{BA}^2 + \overrightarrow{AC}^2 + 2\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC} = 6^2 + 4^2 - 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

  $\Leftrightarrow \quad 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 36 + 16 - 64 \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -8 \neq 6$
- $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 4\times 3 + (-3)\times 2 = 12 - 6 = 6$
- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB^2 = 3^2 = 9 \neq 6$




- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB\times AC\times\cos(60^\circ) = 6\times 4\times\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 12\sqrt{3} \neq 6$

**4. Réponse : c**

*Preuve non demandée*

$x^2 + y^2 - 10x + 6y + 30 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-5)^2 - 5^2 + (y+3)^2 - 3^2 + 30 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-5)^2 + (y+3)^2 = 4$

Équation du cercle de centre A(5 ;-3) et de rayon 2.

**5. Réponse : d**

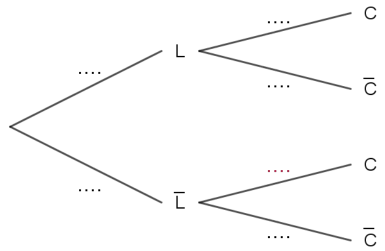
*Preuve non demandée*

Si $q \neq 1$ alors $1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$ donc $1 + 5 + 5^2 + \ldots + 5^{30} = \dfrac{1-5^{31}}{1-5} = \dfrac{5^{31}-1}{4}$

**EXERCICE 2 (5 points)**

Une enquête a été réalisé au près des élèves d'un lycée afin de connaître leur point de vue sur la durée de la pause méridienne et sur les rythmes scolaires.
L'enquête révèle que 55 % des élèves sont favorables à une pause méridienne plus longue.
Parmi ceux qui sont favorables à une pause méridienne plus longue 95 % souhaitent une répartition des cours plus étalée sur l'année scolaire.
Parmi ceux qui ne sont pas favorables à une pause méridienne plus longue, seulement 10 % souhaitent une répartition des cours plus étalée sur l'année scolaire.
On tire au hasard le nom d'un élève du lycée.
On considère les événements suivants :
. L : « L'élève concerné est favorable à une pause méridienne plus longue ».
. C : « L'élève concerné souhaite une répartition des cours plus étalée sur l'année scolaire ».

**1.** Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous décrivant la situation.




**2.** Calculer la probabilité que l'élève concerné soit favorable à une pause méridienne plus longue et souhaite une répartition des cours plus étalée sur l'année scolaire.

**3.** Montrer que $P(C)=0,5675$ .

**4.** Calculer la probabilité que l'élève concerné soit favorable à une pause méridienne plus longue sachant qu'il souhaite une répartition des cours plus étalée sur l'année scolaire.
En donner une valeur arrondie à $10^{-4}$ .

**5.** Les événements L et C sont-ils indépendants ? Justifier la réponse.

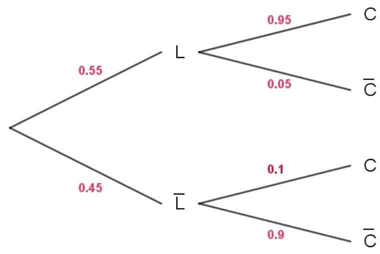
## CORRECTION

**1.** 55 % des élèves sont favorables à une pause méridienne plus longue donc :
$P(L)=0{,}55$ et $P(\bar{L})=1-0{,}55=0{,}45$ .

. Pour les élèves qui sont favorables à une pause méridienne plus longue, 95 % souhaitent une répartition des cours plus étalée sur l'année scolaire donc :
$P_L(C)=0{,}95$ et $P_L(\bar{C})=1-0{,}95=0{,}05$ .

. Parmi les élèves qui ne sont pas favorables à une pause méridienne plus longue, 10 % souhaitent une répartition des cours plus étalée sur l'année scolaire donc :
$P_{\bar{L}}(C)=0{,}1$ et $P_{\bar{L}}(\bar{C})=1-0{,}1=0{,}9$ .

. On obtient l'arbre pondéré :




**2.** On nous demande de calculer $P(L\cap C)$ .
$P(L\cap C)=P(L)\times P_L(C)=0{,}55\times 0{,}95=0{,}5225$

**3.** En utilisant l'arbre pondéré ou la formule des probabilités totales.
$P(C)=P(L\cap C)+P(\bar{L}\cap C)=0{,}5225+P_{\bar{L}}\times P_{\bar{L}}(C)=0{,}5225+0{,}45\times 0{,}1=0{,}5225+0{,}045=0{,}5675$

**4.** On nous demande de calculer $P_C(L)$ .
$P_C(L)=\dfrac{P(L\cap C)}{P(C)}=\dfrac{0{,}5225}{0{,}5675}=0{,}9207$

**5.** $P(L\cap C)=0{,}5225$
$P(L)\times P(C)=0{,}55\times 0{,}5675=0{,}312425\neq P(L\cap C)$
Les événements L et C ne sont pas indépendants.

**EXERCICE 3 (5 points)**

À l'issue d'une étude conduite pendant plusieurs années, on modélise l'évolution du prix du m² d'un appartement neuf dans une ville française de la manière suivante.
À partir d'un prix de 4200€ le m² en 2019, on applique chaque année une augmentation annuelle de 3 %.

**1.** Avec ce modèle, montrer que le prix du m² d'un appartement neuf dans cette ville en 2021 serait de 4455,78€.

**2.** On considère la suite de terme général $u_n$ qui permet d'estimer, avec ce modèle, le prix en euro du m² d'un appartement neuf l'année 2019+n. On a donc $u_0=4200$.

**2.a.** Quelle est la nature de la suite $(u_n)$ ? On précisera la raison.

**2.b.** En déduire l'expression du terme général $u_n$ , en fonction de n, pour tout entier naturel n.

**2.c.** Selon ce modèle, pourra-t-on acheter en 2024 un appartement de 40 m² si l'on dispose d'une somme de 200 000€ ?

**3.** On définit, en langage Python, la fonction seuil ci-dessous :

```
1  def seuil():
2     u=420
3     n=0
4     while u<=8000:
5        u= . . . .
6        n=n+1
7.    return . . .
```

Recopier et compléter les lignes 5 et 7 de sorte que cette fonction renvoie le nombre d'années nécessaires pour que, selon ce modèle le prix du m² d'un appartement neuf dépasse 8000€.

## CORRECTION

**1.** En 2020 le prix du m² augmente de 3 % on obtient :

$4200+\frac{3}{100}\times 4200=4200126=4326\,€$

En 2021 le prix du m² augmente de 3 % on obtient :

$4326+\frac{3}{100}\times 4326=4326+129{,}78=4455{,}78$ .

**2.a.** Si le prix du m² est $u_n$ en 2019+n alors le prix du m² en 2019+n+1 sera :

$u_{n+1}=u_n+\frac{3}{100}\times u_n=u_n+0{,}03\times u_n=1{,}03\,u_n$

**$(u_n)$ est la suite géométrique de premier terme $u_0=4200$ et de raison $q=1{,}03$.**

**2.b.** Pour tout entier naturel n

$u_n=u_0\times q^n=4200\times 1{,}03^n$

**2.c.** 2024=2019+5 $u_5=4200\times 1{,}03^5=4868{,}95$ .

Pour 40 m² 194 758 € (arrondi à l'euro).

**On pourra donc acheter un appartement de 40 m² en 2024 si on dispose de 200 000 €.**

**3.** On complète les lignes 5 et 7.

```
1  def seuil():
2      u=420
3      n=0
4      while u<=8000:
5          u= u*1.03
6          n=n+1
7.     return n
```

Si on exécute ce programme, on obtient ; **n=22** en 2019+22=2041 le prix du m² sera supérieur pour la première année à 8 000 €.

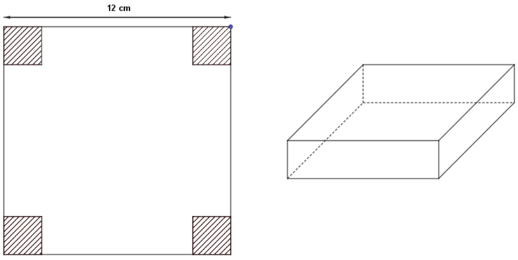
**EXERCICE 4 (5 points)**

**1.** Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=4x^3-48x^2+144x$ .

**1.a.** Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x)=12(x^2-8x+12)$ .

**1.b.** En déduire le tableau de variation de $f$ sur $\mathbb{R}$.

**2.** Dans une plaque de carton carrée de 12 cm de côté, on découpe aux quatre coins, des carrés identiques afin de construire une boîte sans couvercle, comme indiqué sur les figures ci-dessous.
On note $x$ la longueur (en cm) du côté de chacun des coins découpés.
On admet que $x$ appartient à l'intervalle $]0;6[$.




L'objectif est de déterminer la longueur $x$ permettant d'obtenir une boîte de volume maximal.

**2.a.** Montrer que le volume de la boîte est égal à 100 cm³ pour $x=1$. Détailler le calcul.

**2.b.** Montrer que pour tout $x$ appartenant à $]0;6[$, le volume de la boîte est égal à $f(x)$, $f$ étant la fonction étudiée à la question 1.

**2.c.** Quelle est la valeur de $x$ permettant d'obtenir une boîte de volume maximal.

## CORRECTION

**1.a.** $f(x)=4x^3-48x^2+144x$

$f'(x)=4\times(3x^2)-48+(2x)+144=12x^2+96x+144=12(x^2-8x+12)$ .

**1.b.** Le signe de $f'(x)$ est le signe de $T(x)=x^2-8x+12$ .

$\Delta=(-8)^2-4\times1\times12=64-48=1+6=4^2$

$x_1=\dfrac{8-4}{2}=2 \qquad x_2=\dfrac{8+4}{2}=6$

Le coefficient de $x^2$ est positif.

Variations de f

| x | -∞ | | 2 | | 6 | | +∞ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f '(x) | | + | 0 | – | 0 | + | |
| f(x) | | ↗ | 128 | ↘ | 0 | ↗ | |

$f(2)=32-192+288=128$

$f(6)=4\times216-48\times36+144\times6=36\times24-48\times36+36\times24=36\times(24-48+24)=0$ .

**2.a.** Si x=1 alors la base de la boîte est un carré de côté $12-2\times1=10\,\text{cm}$ l'aire de la base est $10^2=100\,\text{cm}^2$ .

La hauteur de la boîte est égale à $1\,\text{cm}$.

Le volume de la boîte est égale à $100\times1=100\,\text{cm}^3$ .

**2.b.** La base de la boîte est un carré de côté $12-2x$ et d'aire $(12-2x)^2$ .

La hauteur de la boîte est x (cm) donc le volume de la boîte est :

$V=x(12-x)^2=x(144-48x+4x^2)=4x^3-48x^2+144x=f(x)$ .

**2.c.** $f(0)=0$ et $f(6)=0$ sur l'intervalle ]0;6[ la fonction f admet pour maximum 128 pour x=2.

**La boîte ayant un volume maximal est la boîte ayant pour base un carré de côté 8 cm et de hauteur 2 cm.**