Sujet 41

EXERCICE 1 (5 points)

Cet exercice est un QCM et comprend cinq questions.
Pour chacune des questions, une seule des quatre réponses proposées est correcte.
Les questions sont indépendantes.
Pour chaque question, indiquer le numéro de la question et recopier la lettre correspondant à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée, mais il peut être nécessaire d'effectuer des recherches au brouillon pour aider à déterminer votre réponse.
Chaque réponse correcte rapporte un point. Une réponse incorrecte ou une question sans réponse n'apporte ni ne retire aucun point.

Question 1

Dans un repère orthonormé, on a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CB}\begin{pmatrix}-1\\5\end{pmatrix}$.

Le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$ vaut :

a) -23	b) -17	c) 19	d) 23

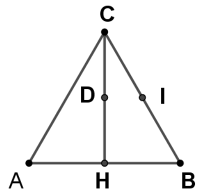
Question 2

Dans repère orthonormé, on a $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-1\\5\end{pmatrix}$. Alors la longueur CB est égale à :

a) 24	b) $\sqrt{24}$	c) 26	d) $\sqrt{26}$

Question 3

ABC est un triangle équilatéral de côté 3. I et H sont les milieux respectifs de [CB] et [AB].
D est le projeté orthogonal de I sur (CH).



On a :

a) $\overrightarrow{HB}.\overrightarrow{HC}=0$	b) $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{DI}=0$	c) $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{AI}=0$	d) $\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{DI}=0$

Question 4

Soit un réel x tel que $\cos(x)=\frac{\sqrt{3}}{2}$, on a :

a) $cos(-x)=\frac{\sqrt{3}}{2}$	b) $sin(x)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$	c) $sin(x)=\frac{\sqrt{3}}{2}$	d) $cos(-x)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

Question 5

Le plan est muni d'un repère orthonormé.

On considère l'équation du cercle : $x^2-2x+(y+3)^2=3$.

Son centre a pour coordonnées :

a) (-1;-3)	b) (1;-3)	c) (-2;3)	d) (-2:-3)

CORRECTION

Question 1 réponse : c

Preuve non demandée

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CB}=(-4)\times(-1)+3\times5=4+15=$ 19

Question 2 réponse : d

Preuve non demandée

$CB^2=(-1)^2+5^{¿}1+25=26$ $CB=\sqrt{26}$

Question 3 réponse : a

Preuve non demandée

H est le milieu de [AB] et ABC est un triangle équilatéral donc [CH) est la hauteur du triangle ABC issue de C et les vecteurs $\overrightarrow{HB}$ et $\overrightarrow{HC}$ sont orthogonaux et $\overrightarrow{HB}.\overrightarrow{HC}=0$

Question 4 réponse : a

Preuve non demandée

La fonction cosinus est paire donc $\cos(-x)=\cos(x)$

Question 5 réponse : b

Preuve non demandée

$x^2-2x+(y+3)^2=3 \Leftrightarrow (x-1)^2-1+(y+3)^2=3 \Leftrightarrow (x-1)^2+(y+3)^2=4$

Équation du cercle de centre $A(1;-3)$ et de rayon 2.

EXERCICE 2 (5 points)

An sein d'un lycée, parmi les élèves de première ayant choisi la spécialité mathématique, il y a 110 filles dont 5 ne poursuivent pas la spécialité en terminale et 90 garçons dont 8 ne poursuivent pas la spécialité.

On interroge un élève au hasard et on définit les événements suivants :

. F l'événement : « l'élève interrogé est une fille »,
. G l'événement : « l'élève interrogé est un garçon »,
. S l'événement : « l'élève interrogé poursuit la spécialité ».

On donnera les valeurs exactes pour chacune des questions.

1. Calculer $P(G)$, $P(G\cap\overline{S})$ et $P(\overline{S})$.

2. L'élève interrogé ne poursuit pas la spécialité. Calculer la probabilité que ce soit un garçon.

3. Les événements G et S sont-ils indépendants ?

CORRECTION

1. Dans le lycée il y a $110+90=200$ élèves ayant choisi la spécialité math, il y a 90 garçons pour les 200 élèves donc $P(G)=\frac{90}{200}=\frac{9}{20}=0{,}45$.

. Parmi les 90 garçons il y en a 8 qui ne poursuivent pas la spécialité donc $P_G(\bar{S})=\frac{8}{90}=\frac{4}{45}$.

$P(G\cap\bar{S})=P(G)\times P_G(\bar{S})=0{,}45\times\frac{4}{45}=0{,}04$.

. On démontre de même que $P(F)=\frac{110}{200}=0{,}55$ et $P_F(\bar{S})=\frac{5}{110}=\frac{1}{22}$

$P(F\cap\bar{S})=P(F)\times P_F(\bar{S})=0{,}55\times\frac{1}{22}=0{,}025$.

. En utilisant la formule des probabilités totales :
$P(\bar{S})=P(\bar{S}\cap G)+P(\bar{S}\cap F)=0{,}04+0{,}025=0{,}065$.

2. On nous demande de calculer $P_{\bar{S}}(G)$.

$P_{\bar{S}}(G)=\frac{P(G\cap\bar{S})}{P(\bar{S})}=\frac{0{,}04}{0{,}065}=\frac{40}{65}=\frac{8}{13}$.

3. $P(S)=1-P(\bar{S})$ =1-0,065=0,935
$P(G\cap S)=P(G)-P(G\cap\bar{S})=0{,}45-0{,}04=0{,}041$
$P(G)\times P(S)=0{,}45\times0{,}935=0{,}42075\neq0{,}41$
Les événements G et S ne sont pas indépendants.

Remarque :
On peut construire un arbre pondéré.

EXERCICE 3 (5 points)

Partie A

Soit la suite géométrique (u_n) de raison 0,999 et de premier terme $u_0=82695$.

1. Calculer u_{19} .

2. Calculer $S= u_0 + u_1 + ... +u_{19}$.

Partie B

La population d'un pays s'élevait à 82695000 au 1er janvier 2016.
Sans tenir compte des flux migratoires, on estime que la population baisse de 0,1 % chaque année.
Déterminer une estimation de ce pays, au premier janvier 2035.

Partie C

Dans cette partie, on tient compte des flux migratoires : on estime qu'en 2016, le solde migratoire (différence entre les entrées et les sorties du territoire) est positif et s'élève à 58700 personnes.
De plus, on admet que la baisse de 0,1 % de la population, ainsi que le solde migratoire restent constants chaque année suivant 2016.
On propose la fonction suivante écrite en Python :

```
def population(N):
  p=82695000
  for I in range(1,N+1):
    p=0.999*p+58700
  return p
```

1. Si on saisit « population(2) » quelle valeur nous retourne cette fonction ?

2. Si on saisit « population(19) » la valeur, arrondie à l'entier, retournée par cette fonction est 82243175.
Que représente ce nombre dans le contexte de la partie C ?

CORRECTION

Partie A

1. Pour tout entier naturel n, $u_n = u_0 \times q^n = 82695 \times 0{,}999^n$
En utilisant la calculatrice :
$u_{19} = 82695 \times 0{,}999^{19} = 81137{,}856$ arrondi au millième

2. $S = u_0 + u - 1 + \ldots + u_{19} = \dfrac{u_0 - u_{20}}{1-q} = \dfrac{u_0 - u_{20}}{0{,}001} = 1000(u_0 - u_{20}) = 1638281{,}823$ arrondi au millième.

Partie B

Pour tout entier naturel n, on note v_n l'estimation du nombre d'habitants du pays au 1^{er} janvier 2016+n.
En particulier $v_0=82695000$.
La population baisse de 0,1 % par an donc pour tout entier naturel n :
$v_{n+1} = v_n - \dfrac{0{,}1}{100} \times v_n = v_n - 0{,}001 \times v_n = (1-0{,}001) \times v_n = 0{,}999 \times v_n$.
(v_n) est la suite géométrique de premier terme $v_0=82695000$ et de raison $q=0{,}999$.
On a donc $v_n = 1000 \times u_n$.
v_{19} est l'estimation du nombre d'habitants au 1^{er} janvier 2016+19=2035.
$v_n = 1000 \times u_{19} = 81137856$.

Partie C

1. La valeur retournéeest l'estimation du nombre d'habitants du pays au premier janvier 2016+2=2018.
Si on exécute le programme, on obtient : **82647034** arrondi à l'entier.

2. 82293175 est l'estimation du nombre d'habitants du pays au 1^{er} janvier 2035.

EXERCICE 4 (5 points)

On considère la fonction f définie sur $]-\infty;2[$ par : $f(x)=\frac{x^2-4x+8}{x-2}$.

On se place dans un repère orthonormé.

1. Résoudre $f(x)=0$.

2. On note f' la fonction dérivée de f.

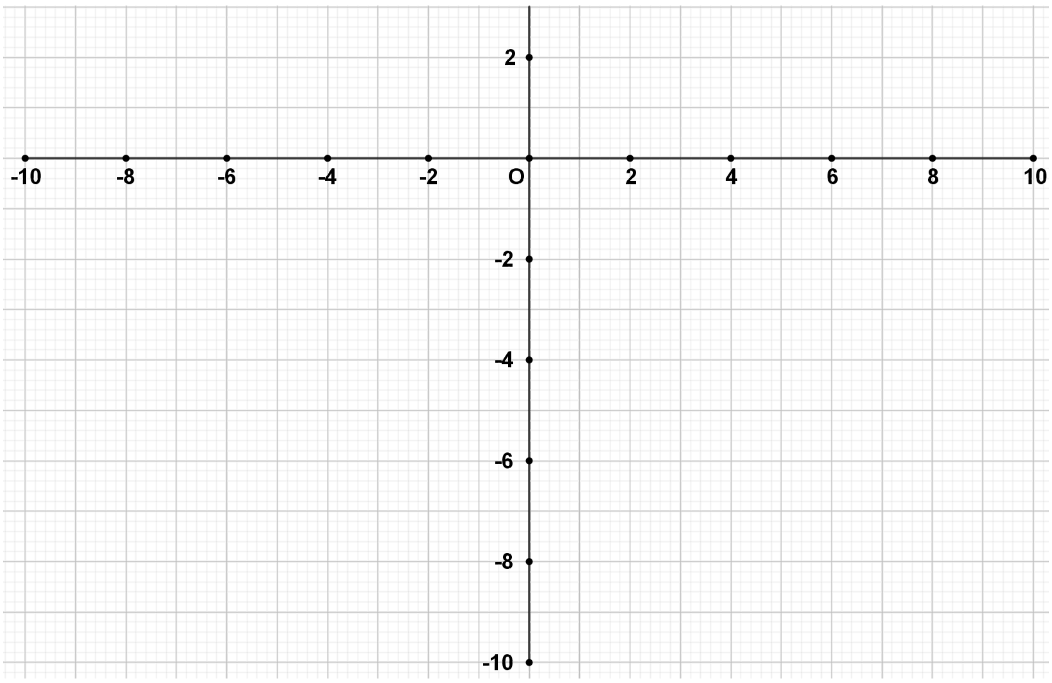
2.a. Démontrer que pour tout x de $]-\infty;2[$ $f'(x)=\frac{x^2-4x}{(x-2)^2}$.

2.b. Déterminer les variations de la fonction f.

3. Déterminer une équation de la tangente D à la courbe représentative de f au point d'abscisse 1.

4. Tracer la droite D et une esquisse de la courbe représentative de la fonction f donnée dans le repère en ANNEXE à rendre avec la copie.

ANNEXE à rendre avec la copie



CORRECTION

1. $f(x)=0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2-4x+8=0 \\ x-2\neq 2 \end{cases}$

$x^2-4x+8=0 \qquad \Delta=(-4)^2-4\times1\times8=-16<0$

$S=\emptyset$

2.a. $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'\times v-u\times v'}{v^2}$

$u(x)=x^2-4x+8 \qquad u'(x)=2x-4$

$v(x)=x-2 \qquad v'(x)=1$

$f'(x)=\dfrac{(2x-4)(x-2)-(x^2-4x+8)}{(x-2)^2}=\dfrac{2x^2-4x-4x+8-x^2+4x-8}{(x-2)^2}=\dfrac{x^2-4x}{(x-2)^2}$

2.b. Le signe de $f'(x)$ sur $]-\infty;2[$ est le signe de x^2-4x .

$x^2-4x=x(x-4)$ le coefficient de x^2 est positif.

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
x^2-4x		+	0	$-$	0	+	

Variations de f.

x	$-\infty$		0		2
f '(x)			0		||
f(x)		↗	-4	↘	||

3. $f(1)=\dfrac{1-4+8}{1-2}=\dfrac{5}{-1}=-5$

$f'(1)=\dfrac{1-4}{(1-2)^2}=\dfrac{-3}{1}=-3$

D est la tangente à la courbe représentative de f au point A d'abscisse 1.

D : y=-3x+b

$-5=-3\times1+b \quad \Leftrightarrow \quad b=-2$

D : $y=-3x-2$

4. La droite D passe par les points de coordonnées (1 ;-5) et (0 ;-2).
Pour donner une esquisse de courbe représentative de f on peut déterminer en utilisant la calculatrice les coordonnées de quelques points.

x	1.25	1	0	-2	-3	-8
f(x)	-9.12	-5	-4	-5	-5.8	-10.4

ANNEXE à rendre avec la copie