Sujet 42

EXERCICE 1 (5 points)

Cet exercice est un QCM et comprend cinq questions.
Pour chacune des questions, une seule des quatre réponses proposées est correcte.
Les questions sont indépendantes.
Pour chaque question, indiquer le numéro de la question et recopier la lettre correspondant à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée, mais il peut être nécessaire d'effectuer des recherches au brouillon pour aider à déterminer votre réponse.
Chaque réponse correcte rapporte un point. Une réponse incorrecte ou une question sans réponse n'apporte ni ne retire aucun point.

Question 1

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=2x^2+5x-4$.
La tangente à la courbe représentative de g au point d'abscisse 2 a pour équation :

a) y=14x+14	b) y=14x-14	c) y=13x-15	d) y=13x-12

Question 2

On se place dans un repère orthonormé du plan.
On considère les points A(4;8), B(9;6) et D(2;11), alors $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BD}$ est égal à :

a) -1	b) 11	c) -31	d) 29

Question 3

Dans un repère orthonormé du plan, on considère la droite D d'équation $3x-4y+5=0$.
La droite parallèle à D et passant par A(4;8) a pour équation :

a) 4x+3y-40=0	b) 3x-4y-5=0	c) 3x-4y+20=0	d) 4x+3y+6=0

Question 4

Soit (u_n) la suite géométrique de raison $q=-1,2$ et de terme initial $u_0=10$ alors :

a) $0<u_{3000}<1000$	b) $u_{3000}=-3590$	c) $u_{3000}>1000$	d) $u_{3000}=-36000$

Question 5

Soit (v_n) la suite définie par $v_0=1$ et $v_{n+1}=4v_n+2$ pour tout entier naturel n.
On veut déterminer la plus petite valeur de n telle que v_n est supérieur ou égal à 100000.
On réalise pour cela le programme incomplet ci-après en langage Python :

```
def algo():
  v=1
  n=0
  while . . . . . . . :
    n=n+1
    v=4*v+2
  return n
```

Pour que le programme retourne la valeur demandée, il faut compléter la partie en pointillé par :

a) v==100000	b) v!=100000	c) v>100000	d) v<100000

CORRECTION

Question 1 réponse : d

Preuve non demandée

g(2)=8+10-4=14

La tangente (T) à la courbe représentative de g au point A(2;14) a pour coefficient directeur $g'(2)$.

$g'(x)=4x+5 \quad g'(2)=4\times2+5=13$

(T) : $y=13x+b \qquad 14=13\times2+b \quad \Leftrightarrow \quad b=-12$

(T) : y=13x-12

Question 2 réponse : d

Preuve non demandée

A(4;8) B(9;6) D(2,11) $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix} \quad \overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}-7\\5\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BD}=(-2)\times(-7)+3\times5=14+15=$ **29.**

Question 3 réponse : c

Preuve non demandée

La parallèle à D passant par A(4;8) admet pour équation $3x-4y+c=0$;

$3\times4-4\times8+c=0 \quad \Leftrightarrow \quad c=20$

3x-4y+20=0

Question 4 réponse : c

Preuve non demandée

Pour tout entier naturel n, $u_n=u_0\times q^n$ donc $u_{3000}=10\times(-1{,}2)^{3000}=10\times1{,}2^{3000}$ car 3000 est un nombre pair.

$u_{3000}>0$ les réponses c et d sont fausses.

$1{,}2^{3000}=(1{,}2^{30})^{100}$ or $1{,}2^{30}>237$ et $1{,}2^{3000}>237^{100}$ donc $u_{3000}>10\times237^{100}>1000$

Question 5 réponse : d

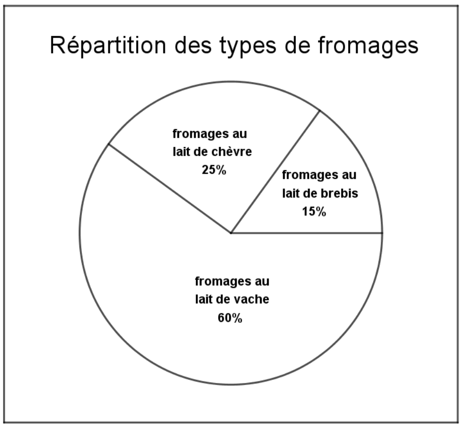
Preuve non demandée

on veut que $v_n\geqslant100000$ il faut effectuer des boucles tant que **v<10000.**

Si on exécute le programme on obtient : n=8.

EXERCICE 2 (5 points)

Un fromager fait l'inventaire des produits qu'il a en cave.
Le graphique ci-dessous indique la répartition de ses trois types de fromages : au lait de chèvre : au lait de vache ou au lait de brebis.



Chacun de ces trois types de fromages se partage en deux catégories : frais ou affiné.
Le tableau suivant donne la répartition des fromages de chaque catégorie suivant leur affinage :

	frais	affiné
Lait de vache	20%	80%
Lait de chèvre	40%	60%
Lait de brebis	70%	30%

Le fromager prend un fromage au hasard. On note les événements suivants :
. V : « le fromage est fait au lait de vache » ;
. C : « le fromage est fait au lait de chèvre » ;
. B : « le fromage est fait au lait de brebis » ;
. F : « le fromage est frais » ;
. A : « le fromage est affiné ».

1. Donner les probabilités $P_C(A)$ et $P(B)$.

2. Démontrer que $P(A)=0,675$.

3. Le fromager prend au hasard un fromage affiné. Quelle est la probabilité qu'il s'agisse d'un fromage au lait de vache ? On donnera le résultat à 10^{-3}près.

CORRECTION

1. L'énoncé précise :

- 60 % des fromages de chèvre sont affinés donc **$P_C(A)=0,6$.**
- 15 % des fromages sont au lait de brebis donc **$P(B)=0,15$.**

2. On peut déterminer de même :

$P(V)=0,6 \quad P(C)=0,25 \quad P_V(A)=0,8 \quad P_B(A)=0,3$.

On utilise le théorème des probabilités totales :

$$P(A)=P(V\cap A)+P(C\cap A)+P(B\cap A)=P(V)\times P_V(A)+P(C)\times P_C(A)+P(B)\times P_B(A)$$

$$P(A)=0,6\times 0,8+0,25\times 0,6+0,15\times 0,3=0,48+0,15+0,045=\mathbf{0,675}.$$

Remarque :

Il n'est pas nécessaire de construire l'arbre pondéré complet.

3. On nous demande de calculer $P_A(V)$.

$$P_A(V)=\frac{P(V\cap A)}{P(A)}=\frac{P(V)\times P_V(A)}{P(V)}=\frac{0,6\times 0,8}{0,675}=\frac{480}{675}=\mathbf{0,711} \text{ à } 10^{-3} \text{ près.}$$

EXERCICE 3 (5 points)

Partie A

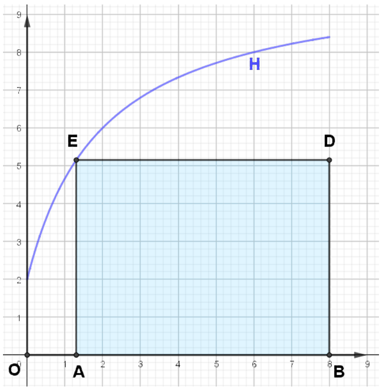
Étudier sur $\mathbb{R}$ le signe de $P(x)=-10x^2-40x+120$

Partie B

On se place dans un repère orthonormé. La courbe H représentée sur le graphique ci-dessous est l'ensemble des points de l'hyperbole d'équation : $y=\frac{10x+4}{x+2}$ avec x appartenant à l'intervalle [0;8].

Pour toute abscisse x dans l'intervalle [0;8], on construit le rectangle ABDE comme indiqué sur la figure. On donne les informations suivantes.

. A et B sont sur l'axe des abscisses ;
. A est d'abscisse x ;
. B et D ont pour abscisse 8 ;
. E appartient à la courbe H ;
. D et E ont la même ordonnée.



L'objectif de ce problème est de déterminer la ou les valeurs éventuelles x de l'intervalle [0;8] correspondant à un rectangle d'aire maximale.

1. Déterminer l'aire du rectangle ABDE lorsque x=0.

2. Déterminer l'aire du rectangle ABDE lorsque x=4.

On définit la fonction f qui à tout réel x de [0;8] associe l'aire du rectangle ABDE.

On admet que : $f(x)=\frac{-10x^2+76x+32}{x+2}$.

3. Répondre au problème posé.

CORRECTION

Partie A

$P(x)=-10x^2-40x+120=10(-x^2-4x+12)$

Le signe de P(x) sur $\mathbb{R}$ est le signe de $T(x)=-x^2+4x+12$

$\Delta=4^2-4\times(-1)\times12=16+48=64=8^2$

$x_1=\frac{4+8}{-2}=-6 \qquad x_2=\frac{4-8}{-2}=2$

Le coefficient de x^2 est négatif, on donne le signe de P(x) sous la forme d'un tableau.

x	-∞		-6		2		+∞
P(x)		−	0	+	0	−	

Partie B

1. H : $y=\frac{10x+4}{x+2}$

Pour x=0 A(0;0) B(8;0) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}8\\0\end{pmatrix}$ AB=8

$y_E=\frac{10\times0+4}{0+2}=\frac{4}{2}=2$ E(0;2) D(8;2) $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$ AE=2

L'aire (en unité d'aire) du rectangle ABDE est égale à $AB\times AE=8\times2=$ **16.**

2. Pour x=4 A(4;0) B(8;0) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}$ AB=4.

$y_E=\frac{10\times4+4}{4+2}=\frac{44}{6}=\frac{22}{3}$ $E\left(4;\frac{22}{3}\right)$ $D\left(8;\frac{22}{3}\right)$ $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}0\\\frac{22}{3}\end{pmatrix}$ $AE=\frac{22}{3}$

L'aire (en unité d'aire) du rectangle ABDE est égale à $AB\times AE=4\times\frac{22}{3}=\frac{88}{3}$.

3. Pour tout x appartenant à l'intervalle [0;8], A(x;0) B(8;0) AB=8-x

$Y_E=\frac{10x+4}{x+2}$ $E\left(x;\frac{10x+4}{x+2}\right)$ $AE=\frac{10x+4}{x+2}$.

L'aire f(x) (en unité d'aire) du rectangle ABDE est égale à :

$$AB\times AE=(8-x)\times\frac{10x+4}{x+2}=\frac{(8-x)(10x+4)}{x+2}=\frac{80+32-10x^2-4x}{x+2}=\frac{-10x^2+76x+32}{x+2}$$

(cette démonstration n'est pas demandée mais elle est admise)

f est dérivable sur [0;8] $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'\times v-u\times v'}{v^2}$

$u(x)=-10x^2+76x+32 \quad u'(x)=-20x+76 \quad v(x)=x+2 \quad v'(x)=1$

$$f'(x)=\frac{(-20x+76)\times(x+2)-(-10x^2+76x+32)\times1}{(x+2)^2}=\frac{-20x^2+76x-40x+152+10x^2-76x-32}{(x+2)^2}$$

$$f'(x)=\frac{-10x^2-40x+120}{(x+2)^2}=\frac{P(x)}{(x+2)^2}.$$

Sur [0;8] le signe de $f'(x)$ est le signe de P(x).

On dresse le tableau de variation de f.

x	0		2		8
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	16	$\nearrow$	36	$\searrow$	0

$f(0)=16$ $\quad f(8)=\dfrac{-640+608+32}{10}=0$ $\quad f(2)=\dfrac{-40+152+32}{4}=\dfrac{144}{4}=36$

Conclusion :
L'aire du rectangle ABDE est maximale pour **$x=2$** cette aire maximale est égale à **36.**

EXERCICE 4 (5 points)

On aplique une tension sinusoîdale u aux bornes d'un circuit comportant en série une réristance et une diode idéale.
Le temps t est exprimé en seconde.

La tension est donnée par la fonction u définie pour tout $t \geqslant 0$ par : $u(t)=\sqrt{3}\sin\left(100\pi t+\frac{\pi}{3}\right)$.

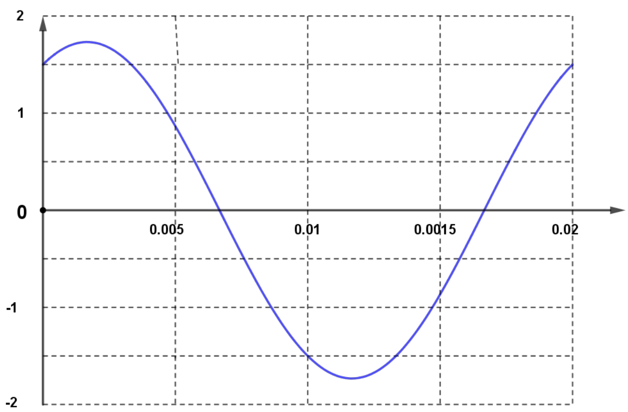
La diode est non passante si $u(t) \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$ et elle est passante si $u(t) > \frac{\sqrt{3}}{2}$.

1. La diode est-elle passante à l'instant $t=0$?

2. Calculer $u\left(\frac{1}{100}\right)$. Interpréter le résultat.

3. On admet que $u\left(t+\frac{2}{100}\right)=u(t)$ pour tout $t \geqslant 0$. En déduire une propriété de la fonction u.

4. On donne ci-dessous la coorbe représentative de la fonction u sur l'intervalle $[0;0,02]$.



On cherche à savoir au bout de combien de temps la diode de vient non passante pour la première fois.

4.a. Conjecturer la solution du problème à l'aide du graphique.

4.b. Calculer $u(0,005)$ et conclure.

CORRECTION

1. Pour $t=0$

$u(0)=\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3}{2}>\frac{\sqrt{3}}{2}$

La diode est passante à l'instant $t=0$.

2. $u\left(\frac{1}{100}\right)=\sqrt{3}\sin\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{3}{2}<\frac{\sqrt{3}}{2}$

La diode est non passante à l'instant $t=0{,}01$.

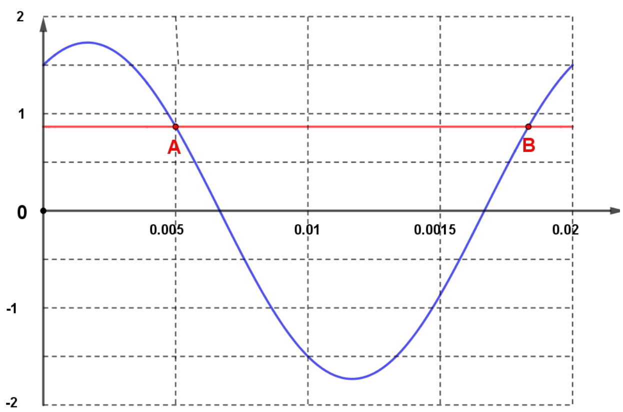
3. Pour tout $t\geqslant 0$

$u\left(t+\frac{2}{100}\right)=u(t+0{,}02)=\sqrt{3}\left(100\pi t+2\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}\sin\left(100\pi t+\frac{\pi}{3}\right)=u(t)$

car la fonction sinus est périodique de période 2π.

La fonction u est périodique de période 0,02.

4.a. On trace sur le graphique la droite (D) d'équation $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$.



(D) coupe la courbe représentative de u en deux points A et B (l'abscisse de A est inférieure à celle de B).

Si t appartient à l'intervalle $[0;x_A[$ la courbe représentative de u est au dessus de (D) donc on a $u(t)>\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Si t appartient à l'intervalle $[x_A;x_B]$ la courbe représentative de u est en dessous de (D) donc on a $u(t)\leqslant\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Si t appartient à l'intervalle $]x_B;0{,}02]$ la courbe représentative de u est au dessus de (D) donc on a $u(t)>\frac{\sqrt{3}}{2}$.

L'abscisse de A est le temps mis pour que la diode soit non passante pour la première fois.
Graphiquement on obtient : **0,005.**

4.b. $u(0{,}005)=\sqrt{3}\sin\left(100\pi\times0{,}005+\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}\sin\left(0{,}5\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)=\sqrt{3}\times\frac{1}{2}$

$u(0{,}005)=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Conclusion

0,005s est le temps mis pour que la diode soit non passante pour la première fois.