Sujet 43

EXERCICE 1 (5 points)

Cet exercice est un QCM et comprend cinq questions.
Pour chacune des questions, une seule des quatre réponses proposées est correcte.
Les questions sont indépendantes.
Pour chaque question, indiquer le numéro de la question et recopier la lettre correspondant à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée, mais il peut être nécessaire d'effectuer des recherches au brouillon pour aider à déterminer votre réponse.
Chaque réponse correcte rapporte un point. Une réponse incorrecte ou une question sans réponse n'apporte ni ne retire aucun point.

Question 1

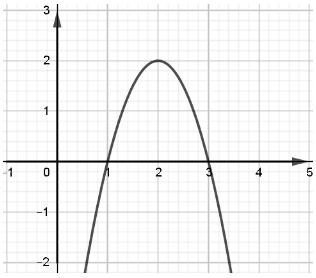
On définit la fonction f sur $]2,5;+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{3x+1}{-2x+5}$.

Alors pour tout x appartenant à l'intervalle $]2,5;+\infty[$, $f'(x)$ est donné par l'expression :

a) $-\dfrac{3}{2}$	b) $\dfrac{17}{(-2x+5)^2}$	c) $\dfrac{13}{(-2x+5)^2}$	d) $-\dfrac{13}{(-2x+5)}$

Question 2

On considère une fonction f polynôme de degré 2 dont une représentation graphique est donnée ci-dessous dans un repère orthonormé.

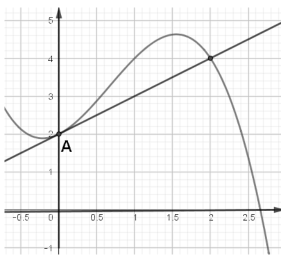


Par lecture graphique, on peut affirmer qu'une forme factorisée de f est :

a) -2(x+1)(x+3)	b) -2(x-1)(x-3)	c) 2(x-1)(x-3)	d) 2(x+1)(x+3)

Question 3

On se place dans un repère orthogonal.
On a tracé ci-dessous la courbe représentative d'une fonction f ainsi que sa tangente au point A.



On a alors :

a) f '(0)=0	b) f '(0)=2	c) f '(0)=1	d) f '(0)=0.5

Question 4

Le plan est rapporté à un repère orthonormé.
On considère les points G(1 ;-2) et H(6;4).
La droite (GH) passe par le point :

a) A(-3;-2)	b) B(2.5;0)	c) C(10;12)	d) D(-14;-20)

Question 5

On considère un nombre réel x appartenant à l'intervalle $\left[\pi ; \frac{3\pi}{2}\right]$ tel que $\cos(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Alors sin(x) est égal à :

a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$	b) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$	c) $-\frac{1}{2}$	d) $\frac{1}{2}$

CORRECTION

Question 1 réponse : b

Preuve non demandée

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\times v - u\times v'}{v^2}$$

$u(x)=3x+1 \quad u'(x)=3 \quad v(x)=-2x+5 \quad v'(x)=-2$

$$f'(x)=\frac{3\times(-2x+5)-(-2)\times(3x+1)}{(-2x+5)^2}=\frac{-6x+15+6x+2}{(-2x+5)^2}=\frac{17}{(-2x+5)^2}$$

Question 2 réponse : b

Preuve non demandée

La courbe représentative de la fonction f coupe l'axe des abscisses aux points d'abscisses 1 et 3, donc la forme factorisée de f contient :(x-1)(x-3).

La fonction f admet un maximum donc le coefficient de x^2 est négatif.

La réponse est donc b.

Question 3 réponse : c

Preuve non demandée

La tangente au point A à la courbe donnée passe par les points A(0;2) et B(2;4).

$f'(0)$ est donc le coefficient directeur de la droite (AB).

$$a=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{4-2}{2-0}=1$$

Question 4 réponse : d

Preuve non demandée

Un point M du plan appartient à la droite (GH) si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{GH}$ et $\overrightarrow{GM}$ sont colinéaires.

$\overrightarrow{GH}\begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix} \quad \overrightarrow{GA}\begin{pmatrix}-4\\0\end{pmatrix} \quad \overrightarrow{GB}\begin{pmatrix}1{,}5\\2\end{pmatrix} \quad \overrightarrow{GC}\begin{pmatrix}9\\14\end{pmatrix} \quad \overrightarrow{GD}\begin{pmatrix}-15\\-18\end{pmatrix}$

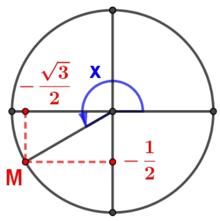
$\overrightarrow{GD}=-3\overrightarrow{GH}$ et les vecteurs $\overrightarrow{GA}$, $\overrightarrow{GB}$ et $\overrightarrow{GC}$ ne sont pas colinéaires au vecteur $\overrightarrow{GH}$.

Question 5 réponse : c

Preuve non demandée

$$\sin^2(x)=1-\cos^2(x)=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$$

Si x appartient à l'intervalle $\left[\pi;\frac{3\pi}{2}\right]$ alors $\sin(x)<0$ donc $\sin(x)=-\frac{1}{2}$.



EXERCICE 2 (5 points)

Camille et Dominique ont été embauchées au même moment dans une entreprise et ont négocié leur contrat à des conditions différentes.

- Camille a commencé en 2010 avec un salaire annuel de 14 400€, alors que le salaire de Dominique était cette même année de 13 200€.
- Le salaire de Camille augmente de 600€ par an alors que celui de Dominique augmente de 4 % par an.

1. Quels étaient les salaires annuels de Camille et Dominique en 2012 ?

2. On modélise les salaires de Camille et Dominique à l'aide de suites.

2.a. On note u_n le salaire de Camille de l'année $2010+n$. On a donc $u_0=14400$.
Quelle est la nature de la suite (u_n) ?

2.b. Déterminer en quelle année le salaire de Camille dépassera 20 000€.

2.c. On note v_n le salaire de Dominique en l'année $2010+n$.
Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n.

2.d. Calculer le salaire de Dominique en 2020. On arrondira le résultat à l'euro.

3. On veut déterminer à partir de quelle année le salaire de Dominique dépassera celui de Camille.
Pour cela on dispose du programme incomplet ci-dessous écrit en langage Python.
Recopier et compléter les quatre lignes en pointillé du programme ci-dessous :

```
def algo ( ):
  A=14400
  B=13200
  n=0
  while . . . . . . :
    A= . . . . . .
    B= . . . . . .
    n= . . .. . .
  return n
```

CORRECTION

1. Le salaire annuel de Camille en 2011 est :
$14400+600=15000$ € .
Le salaire annuel de Camille en 2012 est :
$15000+600$ = **15600€.**
Le salaire annuel de Dominique en 2011 est :
$13200+\frac{4}{100}\times 13200=13200+528=13728$ € .
Le salaire annuel de Dominique en 2012 est :
$13728+\frac{4}{100}\times 13728=13728+549{,}12$ = **14277,12€**

2.a. Pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=u_n+600$.
La suite (u_n) est la suite arithmétique de premier terme $u_0=14400$ et de raison $r=600$.

2.b. Pour tout entier naturel n, $u_n=u_0+nr=14400+600n$.

$$u_n>20000 \quad\Leftrightarrow\quad 14400+600n>20000 \quad\Leftrightarrow\quad 600n>5400 \quad\Leftrightarrow\quad n>\frac{5400}{600}=\frac{54}{6}=\frac{28}{3}$$

$9<\frac{28}{3}<10$ n est un entier naturel donc $u_n>20000 \quad\Leftrightarrow\quad n\geqslant 10$.
En 2010+10=2020 le salaire de Camille dépassera 20000€ pour la première fois.
Remarque : $u_{10}=14400+10\times 600=20400$ € .

2.c. Pour tout entier naturel n, $v_{n+1}=v_n+\frac{4}{100}\times v_n=v_n+0{,}04\times v_n=1{,}04\times v_n$
La suite (v_n) est la suite géométrique de premier terme $v_0=13200$ et de raison $q=1{,}04$.

2.d. Pour tout entier naturel n, $v_n=v_0\times q^n=13200\times 1{,}04^n$.
Le salaire de Dominique en 2020=2010+10 est égal à $v_{10}=13200\times 1{,}04^{10}$ = **19539€.**

3.

```
def algo ( ):
  A=14400
  B=13200
  n=0
  while  A>=B:
     A=  A+600
     B=  B*1.04
     n=  n+1
  return n
```

Si on exécute le programme on obtient $n=14$.
$u_{14}=22800$ et $v_{14}=22858$.

EXERCICE 3 (5 points)

Dans un repère orthonormé, on considère les points A(-1;3), B(5;0) et C(9;3).

1. Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB).

2. Déterminer une équation cartésienne de la droite D passant par le point C et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$

3. Dénombrer que les droites D et (AB) ne sont pas parallèles.

On admet que le point E(3,1) est le point d'intersection de ces deux droites.

4. Les droites D et (AB) sont-elles perpendiculaires ?
On donne $AE=2\sqrt{5}$ et $EC=2\sqrt{10}$.
Calculer la mesure en degrés de l'angle $\widehat{AEC}$.

CORRECTION

1. A(-1;3), B(5;0) et M(x;y) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}6\\-3\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x+1\\y-3\end{pmatrix}$.

M appartient à la droite (AB) si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires si et seulement si $\begin{vmatrix}x+1 & 6\\ y-3 & -3\end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow -3(x+1)-6(y-3)=0 \Leftrightarrow -3x-3-6y+18=0 \Leftrightarrow -3x-6y+15=0$
$\Leftrightarrow$ **x+2y-5=0.**

2. $\vec{n}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$ C(9;3) M(x;y) $\overrightarrow{CM}\begin{pmatrix}x-9\\y-3\end{pmatrix}$.

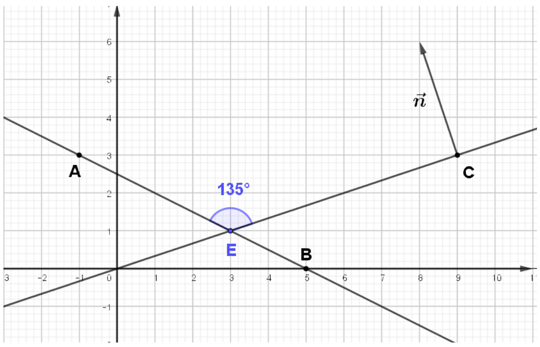
D est la droite passant par C et de vecteur normal $\vec{n}$.
M appartient à la droite D si et seulement si $\vec{n}.\overrightarrow{CM}=0 \Leftrightarrow -1\times(x-9)+3\times(y-3)=0$
$\Leftrightarrow -x+9+3y-9=0 \Leftrightarrow$ **-x+3y=0.**

3. $\vec{n}.\overrightarrow{AB}=-1\times6+3\times(-3)=-6-9=-15\neq0$
$\vec{n}$ n'est pas un vecteur normal de (AB) donc **les droites (AB) et D ne sont pas parallèles.**

4. (AB) : x+2y-5=0 $\vec{w}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à (AB).
$\vec{w}.\vec{n}=1\times(-1)+2\times3=5\neq0$ donc **les droites (AB) et D ne sont pas perpendiculaires.**
On admet que E(3;1) est le point d'intersection des droites (AB) et D.
$\overrightarrow{EA}\begin{pmatrix}-4\\2\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{EC}\begin{pmatrix}6\\2\end{pmatrix}$.

Vérifications (non demandées) :
$EA^2=(-4)^2+2^2=20$ $EA=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$ $EC^2=6^2+2^2=40$ $EC=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$
$\overrightarrow{EA}.\overrightarrow{EC}=-4\times6+2\times2=-24+4=-20$
$\overrightarrow{EA}.\overrightarrow{EC}=EA\times EC\times\cos(\widehat{AEC})=2\sqrt{5}\times2\sqrt{10}\times\cos(\widehat{AEC})=4\sqrt{50}\times\cos(\widehat{AEC})=20\sqrt{2}\times\cos(\widehat{AEC})$
$\cos(\widehat{AEC})=\frac{-20}{20\sqrt{2}}=\frac{-1}{\sqrt{2}}=\frac{-\sqrt{2}}{2}$ donc $\widehat{AEC}$ = **135°.**

On joint une figure non demandée.



EXERCICE 4 (5 points)

Un parent d'élèves propose un jeu pour la fête de l'école.
Une urne opaque contient 100 billes indiscernables au toucher : 10 billes rouges, 30 billes blanches et 60 billes vertes.
Pour une partie, chaque joueur doit miser deux jetons. Ensuite, le joueur prélève une bille au hasard dans l'urne.

- Si la bille prélevée est rouge, le joueur récupère 8 jetons.
- Si la bille prélevée est blanche, le joueur récupère 4 jetons.
- Si la bille prélevée est verte, le joueur ne gagne rien.

On note X la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur en nombre de jetons, c'est à dire, le nombre de jetons gagnés diminué de la mise.

1.a. Établir que la loi de probabilité de X est donnée par :

Valeurs a prises par X	-2	2	6
P(X=a)	0.6	0.3	0.1

1.b. Démontrer que le jeu est équitable, c'est à dire que l'espérance mathématique de X est nulle.

1.c. Calculer la variance, puis l'écart-type de X. On arrondira au centième.

2. Pour financer les différentes actions de l'école, les organisateurs de la fête veulent modifier le jeu pour qu'il leur devienne favorable, ils décident alors d'ajouter des boules vertes dans l'urne.
Combien de boules vertes doit-on ajouter dans l'urne pour que l'espérance du jeu soit égale à -1 ?

CORRECTION

1.a. Si le joueur prélève une boule verte alors le joueur ne gagne rien et il a misé 2 jetons donc son gain algébrique est : 0-2=-2.
Dans l'urne il y a 60 boules vertes parmi les 100 boules.
Les boules sont indiscernables au toucher donc $P(X=-2)=\frac{60}{100}=0{,}6$.

- Si le joueur prélève une boule blanche alors le joueur gagne 4 jetons et il a misé 2 jetons donc son gain algébrique est : 4-2=2.
Dans l'urne il ya 30 boules blanches parmi les 100 boules.
Donc $P(X=2)=\frac{30}{100}=0{,}3$.
- Si le joueurprélève une boule rouge alors le joueur gagne 8 jetons et il a misé 2 jetons donc son gain algébrique est : 8-2=6.
Dans l'urne il y a 10 boules rouges parmi les 100 boules.
Donc $P(X=6)=\frac{10}{100}=0{,}1$.
- On obtient la loi de probabilité donnée.

1.b. $E(X)=-2\times0{,}6+2\times0{,}3+6\times0{,}1=-1{,}2+0{,}6+0{,}6$ = **0.**
Le jeu est donc équitable.

1.c. $V(X)=(-2-0)^2\times0{,}6(2-0)^2\times0{,}3+(6-0)^2\times1=4\times0{,}6+4\times0{,}3+\frac{36}{0{,}1}=2{,}4+1{,}2+3{,}6$ = **7,2.**

L'écart-type de X :
$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{7{,}2}$ = **2,68.**

2. Si ajoute n boules vertes dans l'urne alors l'urne contient : 10 boules rouges, 30 boules blanches et (60+n) boules vertes (pour un total de (100+n) boules).
Soit Y le gain algébrique d'un joueur, les valeurs différentes du gain algébrique sont : -2, 2 et 6.

$P(Y=-2)=\frac{10}{100+n}$ $\quad P(Y=2)=\frac{30}{100+n}$ $\quad P(Y=6)=\frac{60+n}{100+n}$

On veut que $E(Y)=-1$ donc $-2\times\frac{60+n}{100+n}+2\times\frac{30}{100+n}+6\times\frac{60}{100+n}=-1$

$\Leftrightarrow \quad -2\times(60+n)+2\times30+6\times10=-1\times(100+n) \quad \Leftrightarrow \quad -120-2n+60+60=-100-n$

$\Leftrightarrow$ **n=100**

<u>Vérification</u>

$P(Y=-2)=\frac{160}{200}=0{,}8$ $\quad P(Y=2)=\frac{30}{200}=0{,}15$ $\quad P(Y=6)=\frac{10}{200}=0{,}05$

$E(Y)=-2\times0{,}8+2\times0{,}15+6\times0{,}05=-1{,}6+0{,}3+0{,}3=-1$