Sujet 45

EXERCICE 1 (5 points)

Cet exercice est un QCM et comprend cinq questions.
Pour chacune des questions, une seule des quatre réponses proposées est correcte.
Les questions sont indépendantes.
Pour chaque question, indiquer le numéro de la question et recopier la lettre correspondant à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée, mais il peut être nécessaire d'effectuer des recherches au brouillon pour aider à déterminer votre réponse.
Chaque réponse correcte rapporte un point. Une réponse incorrecte ou une question sans réponse n'apporte ni ne retire aucun point.

Question 1

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considdère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\-6\end{pmatrix}$.

Le produit scalaire $\vec{u}.\vec{v}$ est égal à

a) 18	b) -30	c) 0	d) 24

Question 2

On considère le triangle ABC tel que $AB=5$ et $AC=7$ et $\widehat{BAC}=60^\circ$.
Quelle est la longueur du côté BC ?

a) $BC=\sqrt{109}$	b) $BC=\sqrt{74}$	c) $BC=-35\sqrt{3}+74$	d) $BC=\sqrt{39}$

Question 3

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère le cercle $\mathscr{C}$ de centre A(2;3) et de rayon R=4.
Parmi les équations suivantes, laquelle est une équation de $\mathscr{C}$?

a) $x^2+4x+y^2+6y+9=0$	b) $x^2+4x+y^2+6y-3=0$
c) $x^2-4x+y^2-6y-3=0$	d) $x^2-4x+y^2-6y+9=0$

Question 4

Le réel $\dfrac{-23\pi}{3}$ a le même point image sur le cercle trigonométrique que le réel

a) $-\dfrac{\pi}{3}$	b) $\dfrac{\pi}{3}$	c) $-\dfrac{2\pi}{3}$	d) $\dfrac{2\pi}{3}$

Question 5
On considère l'algorithme suivant écrit en langage Python :

```
def Liste(N):
  U=1
  L=[U]
  for i range(1,N)
    U=2*U+3
    L.append(U)
  Return(L)
```

Que contient la variable (L) à la fin de l'exécution dans le cas où on choisit N=4 ?

a) [1,5,13,29,61]	b) [1,5,13,29]	c) 61	d) 9

CORRECTION

Question 1 Réponse : b

Preuve non demandée

$\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}$ $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\-6\end{pmatrix}$ $\vec{u}.\vec{v}=-2\times3+4\times(-6)=-6-24=$ **-30.**

Question 2 Réponse : d

Preuve non demandée

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB\times AC\times\cos(\widehat{BAC})=5\times7\times\cos(60^\circ)=5\times7\times\frac{1}{2}=\frac{35}{2}$

$BC^2=\overrightarrow{BC}^2=(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})^2=(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})^2=\overrightarrow{AC}^2+\overrightarrow{AB}^2-2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB^2+AC^2-2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

$BC^2=5^2+7^2-2\times\frac{35}{2}=25+49-35=39$ $BC=\sqrt{39}$

Question 3 Réponse : c

Preuve non demandée

$\mathscr{C}$ A(2;3) R=4

$\mathscr{C}:\ (x-2)^2+(y-3)^2=4^2 \Leftrightarrow x^2-4x+4+y^2-6y+9=16 \Leftrightarrow$ **$x^2-4x+y^2-6y-3=0$**

Question 4 Réponse : b

Preuve non demandée

$\frac{-23\pi}{3}=\frac{-24\pi}{3}+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}-4\times2\pi$

Question 5 Réponse : b

Preuve non demandée

for i in range(1,4) veut dire dire que l'on donne à i successivement les valeurs 1, 2 et 3=4-1.

Pour i=1 on ajoute à la liste L $U=1\times2+3=5$.

Pour i=2 on ajoute à la liste L $U=5\times2+3=13$

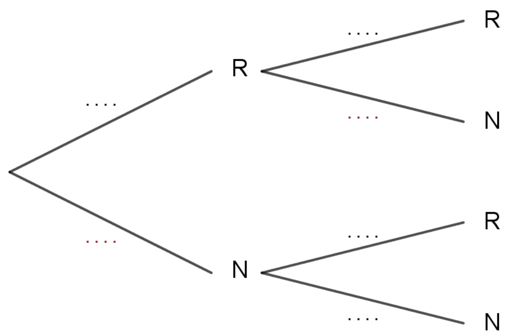
Pour i=3 on ajoute à la liste L $U=13\times2+3=29$

On obtient après exécution de l'algorithme : **L=[1,5,13,29]**

EXERCICE 2 (5 points)

Une urne contient deux boules rouges et trois noires toutes indiscernables au toucher.
On tire au hasard une première boule l'urne en notant sa couleur puis on la remet dans l'urne.
On tire ensuite une boule de l'urne en notant sa couleur.
On note R l'événement « tirer une boule rouge » et N l'événement « tirer une boule noire ».

1. recopier et compléter sur la copie l'arbre pondéré ci-dessous associé à cette expérience.



2. Quelle est la probabilité de tirer 2 boules rouges ?

3. Si un joueur tire une boule rouge, il gagne 20 euros. S'il tire une boule noire il perd 10 euros.
On note X la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur, en euros, à l'issue des deux tirages successifs.
Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

4. Calculer la probabilité que le joueur gagne de l'argent.

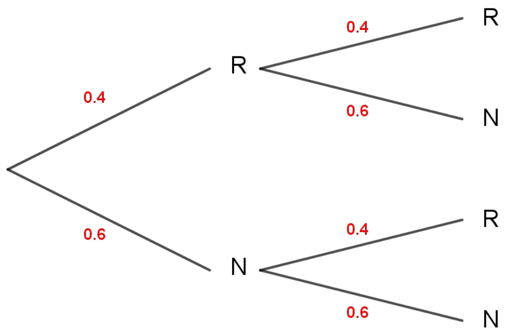
5. Calculer l'espérance de la variable aléatoire X et donner une interprétation.

CORRECTION

1. Les boules sont indiscernables au toucher donc toutes les boules ont la même probabilité d'être tirée.

Dans l'urne il y a 5 boules, 2 rouges et 3 noires donc $P(R)=\frac{2}{5}=0{,}4$ et $P(N)=\frac{3}{5}=0{,}6$.

Remarque : les événements R et N sont des événements contraires.
Le deuxième tirage se fait aussi au hasard donc les deux tirages sont indépendants.



2. La probabilité de tirer deux boules rouges est égale à $P(R)\times P(R)=0{,}4^2$ = **0,16.**

3. Si le joueur tire deux boules rouges, il gagne $2\times 20=40$ € .
Si le joueur tire deux boules noires, il perd $2\times 10=20$ € donc il gagne -20 € .
Si le joueur tire une boule rouge et une boule noire, il gagne $20-10=10$ € .
La probabilité que le joueur tire deux boules noires est égale à $P(N)\times P(N)=0{,}6^2=0{,}36$.
La probabilité que le joueur tire une boule rouge et une boule noire est égale à $1-0{,}16-0{,}30{,}48$ ou $P(R)\times P(N)+P(N)\times P(R)=0{,}4\times 0{,}6+0{,}6\times 0{,}4=0{,}48$.
Donc $P(X=40)=0{,}16$, $P(X=-20)=0{,}36$ et $P(X=10)=0{,}48$.
On donne la loi de probabilité de X sous la forme d'un tableau.

x_i	-20	10	40
$P(X=x_i)$	0.36	0.48	0.16

4. Le joueur gagne de l'argent si et seulement si $X\geqslant 10$.
$P(X\geqslant 10)=P(X=10)+P(X=40)=0{,}48+0{,}16$ = **0,64.**

5. $E(X)=-20\times 0{,}36+10\times 0{,}48+40\times 0{,}16=-7{,}2+4{,}8+6{,}4$ = **4.**
Le gain moyen du joueur pour chaque partie est égal à 10€.

EXERCICE 3 (5 points)

On considère les suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ définies par $u_0=7$ et pour tout entier naturel n :
$u_{n+1}=0{,}5\,u_n+3$ et $v_n=u_n-6$

1. Montrer que la suite $(v_n)_{n\geqslant 0}$ est la suite géométrique de premier terme $v_0=1$ et de raison 0,5.

2. Pour tout entier naturel n, exprimer v_n en fonction de n.

3. En déduire pour tout entier naturel n, une expression de u_n en fonction de n.

4. On note $S=v_0+v_1+\ldots+v_{100}$ la somme des 101 premiers termes de la suite $(v_n)_{n\geqslant 0}$.
4.a. Déterminer la valeur de S.
4.b. En déduire la valeur de la somme des 101 premiers termes de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$.

CORRECTION

1. Pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=0,5u_n+3$ et $v_n=u_n-6$ (donc $u_n=v_n+6$).
$v_{n+1}=u_{n+1}-6=(05u_n+3)-6=0,5(v_n+6)-3=0,5v_n+3-3=0,5v_n$.
$v_0=u_0-6=7-6=1$.
Donc $(v_n)_{n\geqslant 0}$ est la suite géométrique de premier terme **$v_0=1$** et de raison **$q=0,5$**.

2. Pour tout entier naturel n, $v_n=v_0 x q^n=1x0,5^n=$ **$0,5^n$.**

3. Pour tout entier naturel n, $u_n=v_n+6=$ **$0,5^n+6$.**

4.a.
$$\begin{array}{rl} S= & v_0+v_1+\ldots+v_{100} \\ -0,5S= & \quad\quad v_1+\ldots+v_{100}+v_{101} \\ \hline 0,5S= & v_0 \quad\quad\quad\quad\quad\quad -v_{101} \end{array}$$
$$S=\frac{v_0-v_{101}}{0,5}=\frac{1-0,5^{101}}{0,5}=2-2\times 0,5^{101}=\mathbf{2-0,5^{100}}.$$

4.b. $S_1=u_0+u_1+.+\ldots+u_{100}=v_0+6+v_1+6+\ldots+v_{100}+6=S+101\times 6=606+2-0,5^{100}=$ **$608-0,5^{100}$.**

EXERCICE 4 (5 points)

Soit f la fonction définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par $f(x)=3x^3-5x^2+2$.
On note C_f sa courbe représentative dans un repère du plan.

1. On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée.
Donner l'expression de $f'(x)$, pour tout nombre réel x.

2. On note T la tangente à C_f au point d'abscisse -1.
Donner l'équation réduite de la tangente T.

3. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=3x^3-4x+1$.
On note C_g sa courbe représentative dans le même repère que la courbe C_f.

3.a. Montrer que pour tout nombre réel x, $f(x)-g(x)=-5x^2+4x+1$.
3.b. Étudier sur $\mathbb{R}$ le signe de $f(x)-g(x)$.
3.c. En déduire pour quelles valeurs de x la courbe C_f est au dessus de la courbe C_g.

CORRECTION

1. $f(x)=3x^3-5x^2+2$

$f'(x)= 9x^2-10x$

2. $f(-1)=-3-5+2=-6$ $f'(-1)=9-10=-1$

T est la droite passant par le point A(-1 ;-6) et de coefficient directeur : -1.

T : $y=-x+b$ $6=1+b \Leftrightarrow b=-7$

T : $y=-x-7$

3. **P**our tout nombre réel x : $g(x)=3x^3-4x-1$

3.a. $f(x)-g(x)=3x^3-5x^2+2-(3x^3-4x+1)$ = **$-5x^2+4x+1$.**

3.b. $\Delta=4^2-4\times(-5)\times1=16+20=36=6^2$

$x_1=\frac{-4+6}{-10}=-\frac{2}{5}=-\frac{1}{5}$ $x_2=\frac{-4-6}{-10}=1$

Le coefficient de x^2 est négatif.

On donne le signe de f(x)-g(x) sous la forme d'un tableau.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{5}$		1	
f(x)-g(x)		$-$	0	$+$	0	$-$

3.c.

Si pour une valeur de x f(x)-g(x) >0 $\Leftrightarrow$ f(x) > g(x) alors l'ordonnée du point M de C_f d'abscisse x est supérieure à l'ordonnée du point n de la courbe C_g d'abscisse x.

C'est à dire M est au dessus de N.

Si f(x)-g(x) < 0 alors M est en dessous de N.

Conséquence :

La courbe C_f est au dessus de C_g Pour toutes valeurs de x appartenant à l'intervalle $\left]\frac{-1}{5};1\right[$.

