Sujet 46

EXERCICE 1 (5 points)

Cet exercice est un QCM et comprend cinq questions.
Pour chacune des questions, une seule des quatre réponses proposées est correcte.
Les questions sont indépendantes.
Pour chaque question, indiquer le numéro de la question et recopier la lettre correspondant à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée, mais il peut être nécessaire d'effectuer des recherches au brouillon pour aider à déterminer votre réponse.
Chaque réponse correcte rapporte un point. Une réponse incorrecte ou une question sans réponse n'apporte ni ne retire aucun point.

1. On munit le plan d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

On considère trois points A, B et C tels que $AB=2$, $AC=\sqrt{3}$ et $\widehat{ABC}=\frac{5\pi}{6}$

a) $2\sqrt{3}$	b) 3	c) $-2\sqrt{3}$	d) -3

2. Soit α un nombre réel. On munit le plan du repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

On considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}\sin(\alpha)\\ \cos(\alpha)\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-\cos(\alpha)\\ \sin(\alpha)\end{pmatrix}$.

Alors $\vec{u}.\vec{v}$ est égal à :

a) $sin^2(\alpha)+cos^2(\alpha)$	b) 1	c) $sin^2(\pi)-cos^2(\alpha)$	d) 0

3. On munit le plan du repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

On considère les points $A(2;8)$, $B\left(\frac{25}{3};0\right)$, $C(7;-5)$ et $D(3;0)$.

Alors, les droites (AB) et (CD) sont :

a) parallèles	b) perpendiculaires	c) sécantes	d) confondues

4. On munit le plan du repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

On considère la fonction f définie pour tout réel x non nul par $f(x)=\frac{3}{x}$. On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans ce repère.
L'équation réduite de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1 est :

a) y=-3x+6	b) y=-3x	c) y=3x	d) y=3x+6

5. l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $x^2=6x-5$ est :

a) S={1;5}	b) S={1}	c) S=∅	d) S={-5;-1}

CORRECTION

1. Réponse : **d**

Preuve non demandée

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB\times AC\times\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)$

$AB=2$ $AC=\sqrt{3}$ $\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=2\sqrt{3}\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=$ **-3**

2. Réponse : **d**

Preuve non demandée

$\vec{u}\begin{pmatrix}\sin(\alpha)\\\cos(\alpha)\end{pmatrix}$ $\vec{v}\begin{pmatrix}-\cos(\alpha)\\\sin(\alpha)\end{pmatrix}$ $\vec{u}.\vec{v}=\sin(\alpha)\times(-\cos(\alpha))+\cos(\alpha)\times\sin(\alpha)=$ **0**

3. Réponse : **c**

Preuve non demandée

$A(2;8)$, $B\left(\frac{25}{3};0\right)$, $C(7;-5)$ et $D(3;0)$ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}\frac{25}{3}-2\\0-8\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}\frac{19}{3}\\-8\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}3-7\\0+5\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-4\\5\end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix}\frac{19}{3} & -4\\-8 & 5\end{vmatrix}=\frac{19}{3}\times5-4\times8=\frac{95}{3}-32\neq0$. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ne sont pas colinéaires donc les droites (AB) et (CD) ne sont pas parallèles ou confondues.

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=\frac{19}{3}\times(-4)+(-8)\times5=-\frac{76}{3}-40\neq0$. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ne sont pas orthogonaux donc les droites (AB) et (CD) ne sont pas perpendiculaires.

Conséquence :

Les quatrième réponse est donc vraie et **les droites (AB) et (CD) sont sécantes.**

4. Réponse : **a**

Preuve non demandée

$f(x)=\frac{3}{x}$ $f(1)=3$ $f'(x)=3\times\left(-\frac{1}{x^2}\right)=-\frac{3}{x^2}$ $f'(1)=-3$

La tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point A(1;3) est droite passant par A et de coefficient directeur : -3.

$y=-3x+b$ $3=-3\times1+b$ $\Leftrightarrow$ $b=6$ **y=-3x+6**

5. Réponse : **a**

Preuve non demandée

$x^2=6x-5$ $\Leftrightarrow$ $x^2-6x+5=0$

$\Delta=(-6)^2-4\times1\times5=36-20=16=4^2$

$x_1=\frac{6-4}{2}=1$ $x_2=\frac{6+4}{2}=5$

S={ 1 ; 5}

EXERCICE 2 (5 points)

Maxime participe à un jeu qui se déroule en deux parties :
. La probabilité qu'il gagne la première partie est de 0,2.
. S'il gagne la première partie, il gagne la deuxième partie avec une probabilité de 0,9.
. S'il perd la première partie, il perd la suivante avec une probabilité de 0,6.
On note :
. G_1 l'événement « Maxime gagne la première partie ».
. G_2 l'événement « Maxime gagne la deuxième partie ».

Partie A

1. Construire un arbre pondéré illustrant la situation.

2. Calculer la probabilité que Maxime gagne les deux parties du jeu.

3. Montrer que la probabilité que Maxime gagne la deuxième partie du jeu est 0,5.

Partie B

On sait de plus que :
. à chaque partie gagnée le joueur gagne 1,5€
. à chaque partie perdue, il perd 1€.
On note X la variable qui correspond au gain algébrique en euros de Maxime à l'issue des deux parties.

1. Recopier sur la copie et compléter le tableau ci-dessous donnant la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

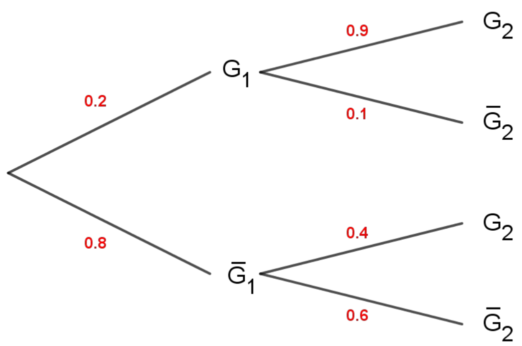
Valeurs de X_j			**3**	**Total**
probabilité			**0.18**	

2. Déterminer si ce jeu est équitable. Justifier.

CORRECTION

Partie A

1. La probabilité que Maxime gagne la première partie est 0,2 donc :
$P(G_1)=0{,}2$ et $P(\bar{G}_1)=1-0{,}2=0{,}8$.
Si Maxime gagne la première partie, il gagne la deuxième partie avec une probabilité de 0,9 donc :
$P_{G_1}(G_2)=0{,}9$ et $P_{G_1}(\bar{G}_2)=1-0{,}9=0{,}1$.
Si Maxime perd la première partie, il perd la suivante avec une probabilité de 0,6 donc :
$P_{\bar{G}_1}(\bar{G}_2)=0{,}6$ et $P_{\bar{G}_1}(G_2)=1-0{,}6=0{,}4$.
On obtient l'arbre pondéré :



2. $P(G_1 \cap G_2)=P(G_1)\times P_{G_1}(G_2)=0{,}2\times 0{,}9=$ **0,18**

3. En utilisant l'arbre pondéré ou la formule des probabilités totales, on obtient :
$P(G_2)=P(G_1\cap G_2)+P(\bar{G}_1\cap G_2)=P(G_1)\times P_{G_1}(G_2)+P(\bar{G}_1)\times P_{\bar{G}_1}(G_2)$
$P(G_2)=0{,}2\times 0{,}9+0{,}8\times 0{,}4=0{,}18+0{,}32=$ **0,5.**

Partie B

1. Si Maxime gagne les deux parties alors il gagne $2\times 1{,}5=3$ € .
Si Maxime perd les deux parties alors il gagne $2\times(-1)=-2$ € .
Si Maxime gagne une partie et perd l'autre alors il gagne $1\times 1{,}5+1\times(-1)=0{,}5$ € .
Les valeurs de X sont : -2 ; 0,5 et 3.
$P(X=3)=P(G_1\cap G_2)=0{,}18$
$P(X=-2)=P(\bar{G}_1\cap\bar{G}_2)=P(\bar{G}_1)\times P_{\bar{G}_1}(\bar{G}_2)=0{,}8\times 0{,}6=0{,}48$
$P(X=-2)+P(X=0{,}5)+P(X=3)=1$ donc :
$P(X=0{,}5)=1-P(X=-2)-P(X=3)=1-0{,}48-0{,}18=1-0{,}66=0{,}34$.

Valeurs de X_j	-2	0.5	3	Total
probabilité	0.48	0.34	0.18	1

2. $E(X)=-2\times 0{,}48+0{,}5\times 0{,}34+3\times 0{,}18=-0{,}96+0{,}17+0{,}54=-0{,}25<0$.
Le jeu n'est pas équitable.
Si Maxime fait un très grand nombre de parties, il perdra en moyenne 0,25€ par partie.

EXERCICE 3 (5 points)

Une personne souhaite louer une maison à partir du 1er janvier 2020 et a le choix entre deux formules de contrat.

. Contrat n°1 : le loyer augmente chaque année de 200€.
. Contrat n°2 : le loyer augmente chaque année de 5 %.

Pour tout entier naturel n, on note :

. u_n le loyer annuel de l'année 2020+n pour le contrat n°1.
. v_n le loyer annuel de l'année 2020+n pour le contrat n°2.

r

Dans les deux cas, le loyer annuel initial est 3600€. On a donc $u_0=v_0=3600$.

1. Étude de la suite (u_n).

1.a. Déterminer le loyer annuel de l'année 2021 pour le contrat n°1.

1.b. Déterminer l'expression de u_n en fonction de n puis en déduire le loyer annuel de l'année 2030.

2. Étude de la suite (v_n).

2.a. Déterminer le loyer annuel de l'année 2021 pour le contrat n°2.

2.b. Déterminer l'expression de v_n en fonction de n puis en déduire le loyer annuel de l'année 2030.

3. On considère le script suivant, écrit en langage Python :

```
u=3600
v=3600
n=0
while u>=v:
  u=u+200
  v=1.05*v
  n=n+1
```

Après exécution, la variable n contient la valeur 6.
Donner une interprétation de ce résultat dans le contexte de l'exercice.

CORRECTION

1.a. Pour le contrat n°1 : chaque année le loyer annuel augmente de 200€ donc le loyer annuel pour l'année 2021 est 3600+200= **3800€.**

1.b. Pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1}=u_n+200$ donc la suite (u_n) est la suite arithmétique de premier $u_0=3600$ et de raison $r=200$, donc $u_n=u_0+nr$ = **3600 + 200n.**
2030 =2020 + 10.
Le loyer annuel pour l'année 2030 est $u_{10}=3600+200\times10$ = **5600€.**

2.a. Poour le contrat n°2 : chaque année le loyer annuel augmente de 5 % donc le loyer annuel pour l'année 2021 est $3600+\frac{5}{100}\times3600=3600+180$ = **3780€.**

2.b. Pour tout entier naturel n, on a : $v_{n+1}=v_n+\frac{5}{100}\times v_n=v_n+0{,}05\,v_n=1{,}05\,v_n$ donc la suite (v_n) est la suite géométrique de premier terme $v_0=3600$ et de raison $q=1{,}05$ donc $v_n=v_0 x q^n$=**$3600x1{,}05^n$.**
Le loyer annuel pout l'année 2030 est : $v_{10}=3600\times1{,}05^{10}$ = **5864,02€** arrondi au centième.

3. 2020 + 6= 2026
2026 est la première année pour laquelle le loyer annuel pour le contrat n°2 est supérieur au loyer annuel pour le contrat n° 1.
$u_6=3600+6\times200=4800$ €
$v_6=3600\times1{,}05^6=4824{,}34$ € arrondi au centième.

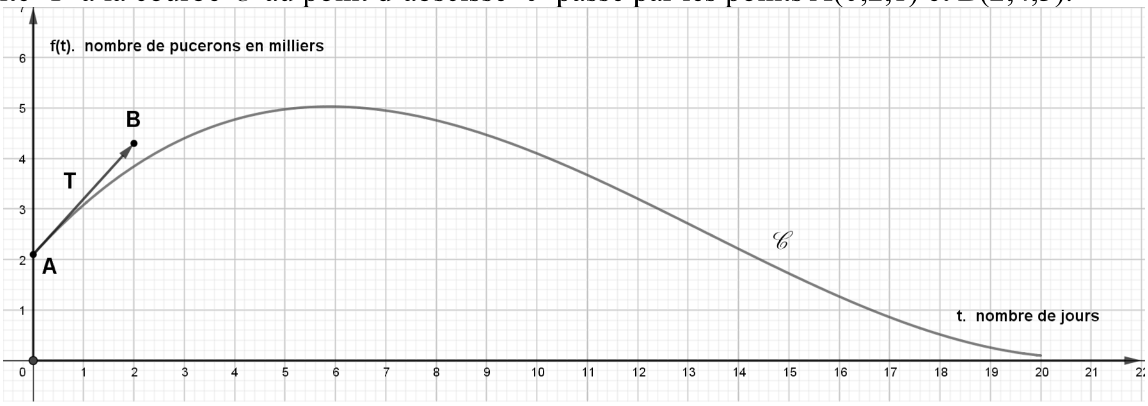
EXERCICE 4 (5 points)

Des pucerons envahissent une roseraie.
On introduit alors des coccinelles prédatrices des pucerons, à l'instant $t=0$ et on s'intéresse à l'évolution du nombre de pucerons à partir de cet instant et sur une période de 20 jours.

Partie A

Dans le repère ci-dessous, on a tracé :

- La courbe $\mathscr{C}$ représentant le nombre de milliers de pucerons en fonction du nombre de jours écoulés depuis l'introduction des coccinelles.
- La tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0 passe par les points $A(0;2,1)$ et $B(2;4,3)$.



1. Déterminer par lecture graphique le nombre de pucerons à l'instant où l'on introduit les coccinelles puis le nombre maximal de pucerons sur la période de 20 jours.

2. On assimile la vitesse de prolifération des pucerons à l'instant t au nombre dérivé $f'(t)$.
Déterminer graphiquement la vitesse de prolifération des pucerons à l'instant $t=0$.

Partie B

On modélise l'évolution du nombre des pucerons par la fonction f définie pour tout t appartenant à l'intervalle $[0;20]$ par : $f(t)=0,003t^3-0,12t^2+1,1t+2,1$ où t représente le nombre de jours écoulés depuis l'introduction des coccinelles et $f(t)$ le nombre de pucerons en milliers.

1. Déterminer $f'(t)$ pour tout t appartenant à l'intervalle $[0:20]$ où f' désigne la fonction dérivée de la fonction f.

2. Dresser le tableau de signes de $f'(t)$ sur $|0;20]$.

3. En déduire le tableau des variations de la fonction f sur l'intervalle $[0;20]$.
Préciser les images des valeurs de t apparaissant dans le tableau.

CORRECTION

Partie A

1. Le nombre de pucerons à l'instant où l'on introduit des coccinelles est : 2,1 milliers soit **2100.**
Le nombre maximal de pucerons sur la période de 20 jours est obtenu pour **t=6 (6 jours)** et est égal à :
5 milliers soit **5000.**

2. La vitesse de prolifération des pucerons à l'instant $t=0$ est $f'(0)$ soit le coefficient directeur de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.
T=(AB) A(0;2,1) B(2;4,3)

$$f'(0)=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{4{,}3-2{,}1}{2-0}=\frac{2{,}2}{2}=\mathbf{1{,}1.}$$

Partie B

1. t appartient à l'intervalle [0:20].
$f(t)=0{,}003t^3-0{,}12t^2+1{,}1t+2{,}1$
$f'(t)=0{,}009t^2+-0{,}24t+1{,}1$

2. Pour déterminer le signe du trinôme $0{,}009t^2-0{,}24t+1{,}1$ sur $\mathbb{R}$ on calcule son discriminant.

$$\Delta=0{,}24^2-4\times0{,}009\times1{,}1=0{,}018>0$$

$$t_1=\frac{0{,}24-\sqrt{0{,}018}}{0{,}018}=5{,}88 \quad \text{(arrondi au centième)}$$

$$t_2=\frac{0{,}24+\sqrt{0{,}018}}{0{,}018}=20{,}79>20 \quad \text{(arrondi au centième).}$$

Le coefficient de t^2 est positif donc le trinôme est négatif à l'intérieur des racines et positif à l'extérieur.
Pour déterminer le tableau des signes de $f'(t)$ on considère le signe du trinôme sur [0;20].
On a : $0<t_1<20<t_2$.

t	0		t_1		20
f '(t)		+	0	−	

3. Tableau des variations de f

t	0		t_1		20
f '(t)		+	0	−	
f(t)	f(0)	↗	f(t_1)	↘	f(20)

$f(0)=2{,}1$ $f(20)=0{,}1$ on choisit 5,88 pour valeur approchée de t_1 pour calculer $f(t_1)$.
$f(t_1)=5{,}03$ (arrondi au centième).