Sujet 47

EXERCICE 1 (5 points)

Cet exercice est un QCM et comprend cinq questions.
Pour chacune des questions, une seule des quatre réponses proposées est correcte.
Les questions sont indépendantes.
Pour chaque question, indiquer le numéro de la question et recopier la lettre correspondant à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée, mais il peut être nécessaire d'effectuer des recherches au brouillon pour aider à déterminer votre réponse.
Chaque réponse correcte rapporte un point. Une réponse incorrecte ou une question sans réponse n'apporte ni ne retire aucun point.

Question 1

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de coordonnées respectives (-1;0) et (-3;4) dans un repère orthonormé.
Alors $\|\vec{u}-\vec{v}\|$ est égale à :

a)	$4\sqrt{2}$	b)	$\sqrt{32}$	c)	20	d)	$2\sqrt{5}$

Question 2

Le tableau de signes de la fonction polynôme définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x^2+2x+5$ est :

a.

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
f(x)		+	0	−	0	+	

b.

x	$-\infty$		-16		$+\infty$
f(x)		+	0	+	

c.

x	$-\infty$		$+\infty$
f(x)		+	

d.

x	$-\infty$		$+\infty$
f(x)		−	

Question 3

Sur l'intervalle $]-\pi;\pi]$, l'équation $\sin x=\frac{1}{2}$ a pour solution(s) :

a)	$\frac{\pi}{6}$	b)	$\frac{\pi}{3}$ et $\frac{2\pi}{3}$	c)	$-\frac{\pi}{6}$ et $\frac{\pi}{6}$	d)	$\frac{\pi}{6}$ et $\frac{5\pi}{6}$

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

Question 4

On considère la suite (u_n) définie par $u_0=15$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1}=0,8u_n+1$.
On a écrit la fonction suite( ), ci-dessous, en langage Python.

```
def suite():
  n=0
  u=15
  while u>6:
    n=n+1
    u=0.8*u+1
  return n
```

L'appel de cette fonction renvoie :

a. le plus petit entier n tel que $u_n>6$

b. le plus petit entier n tel que $u_n\leqslant 6$

c. le premier terme de la suite tel que $u_n>6$

d. le premier terme de la suite tel que $u_n\leqslant 6$

Question 5

Pour tout réel x, $e^{3x-5}\times e^{4-3x}$ est égal à :

a)	$\frac{1}{e}$	b)	$e^{(3x-5)(4-3x)}$	c)	e	d)	$e^{-9x^2+27x-20}$

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

CORRECTION

Question 1 : réponse d

Preuve non demandée

$\vec{u}(-1;0)$ $\vec{v}(-3;4)$ $\vec{u}-\vec{v}(2;-4)$

$\|\vec{u}-\vec{v}\|^2=2^2+(-4)^2=4+16=20$

$\|\vec{u}-\vec{v}\|=\sqrt{20}=\sqrt{4\times5}=2\sqrt{5}$

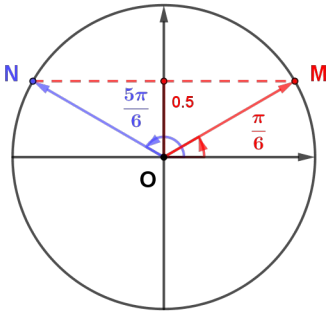
Question 2 : réponse c

Preuve non demandée

$f(x)=x^2+2x+5=x^2+2x+1+4=(x+1)^2+4>0$

Question 3 : réponse d

Preuve non demandée



Question 4 : réponse b

Preuve non demandée

La dernière ligne est return **n** lorsque l'on a plus $n>6$ donc lorsque l'on a $n\leqslant 6$.

Remarque :

Si on exécute le programme on obtient $n=11$.

Question 5 : réponse a

Preuve non demandée

$e^{3x-5}\times e^{4-3x}=e^{(3x-5)+(4-3x)}=e^{-1}=\frac{1}{e}$

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

EXERCICE 2 (5 points)

Le président d'un clu et b de handball a constaté une augmentation du nombre d'adhérents dans son club depuis 2016 (toutes catégories confondues). En effet en 2016, il y avait 371 adhérents, 396 en 2017 et 416 en 2018.
Ce qui correspond à une hausse chaque année d'environ 5 %.
Il souhaite faire une estimation pour les années à venir, en supposant que cette hausse de 5ù par an se poursuit.
On modélise le nombre d'adhérents l'année 2018+n par une suite de terme général u_n.
On a donc u_0=416.

1. Calculer u_1 et u_2. Arrondir les résultats à l'unité.

2. Quelle est la nature de la suite (u_n) ?
Préciser son premier terme et sa raison.

3. Exprimer u_n , en fonction n, pour tout entier naturel n.

4. Calculer u_7 , interpréter ce résultat par rapport aux données de l'exercice.

5. À partir de quelle année le président du club peut-il espérer dépasser 700 adhérents ?

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

CORRECTION

1. $u_1 = u_0 + \frac{5}{100} \times u_0 = 416 + 0{,}05 \times 416 = 416 + 20{,}8 =$ **437** arrondi à l'unité.

$u_2 = u_1 + \frac{5}{100} \times u_1 = 437 + 0{,}05 \times 437 = 437 + 21{,}85 =$ **459** arrondi à l'unité.

2. Pour tout entier naturel n :

$u_{n+1} = u_n + \frac{5}{100} \times u_n = u_n + 0{,}05 \times u_n = 1{,}05 \times u_n$;

(u_n) est donc la suite géométrique de premier terme $u_0=416$ et de raison $q=1{,}05$.

3. Pour tout entier naturel n :

$u_n = u_0 \times q^n =$ **$416 \times 1{,}05^n$**

4. $u_7 = 416 \times 1{,}05^7 =$ **585** arrondi à l'unité.

L'estimation du nombre d'adhérents en 2018+7=2025 est 585.

5. La suite (u_n) est strictement croissante car pour tout entier naturel n :

$u_{n+1} - u_n = 1{,}05\,u_n - u_n = 0{,}05\,u_n = 0{,}5 \times 416 \times 1{,}05^n > 0$.

En utilisant la calculatrice :

$u_8 = 615$ $u_6 = 645$ $u_{10} = 678$ $u_{11} = 712$

2018+11=2029

Le président du club peut espérer dépasser le nombre de 700 adhérents à partir de l'année 2029.

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

EXERCICE 3 (5 points)

Un artisan fabrique de la confiture qu'il vend à un grossiste.
Le coût, en euros, de fabrication de x kilos de confiture est :
$C(x)=0{,}1x^2+0{,}7x+100$ pour $x\in[0;160]$

1. Chaque kilo de confiture est vendu 14€. Exprimer cette recette R en fonction de x.

2. Soit B la fonction représentant le bénéfice de l'artisan définie sur [0;10].
B a pour expression $B(x)=-0{,}1x^2+13{,}3x-100$.
Étudier le signe de B(x). En déduire l'intervalle dans doit se trouver le nombre de kilos de confiture à vendre pour que l'artisan réalise un bénéfice positif.

3. On note B' la fonction dérivée de B.

3.a. Déterminer B'(x).

3.b. Dresser le tanleau de variation de B sur l'intervalle [0;160].

3.c. Donner le nombre de kilos de confiture à vendre pour que le bénéfice soit maximal ainsi que son montant.

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

CORRECTION

1. **R(x)=14x**

2. B(x)=R(x)-C(x)= 14x-0,1x²-0,7x-100= **-0,1x²+13,3x-100**
B(x) est un trinôme du second degré
$\Delta = 13{,}3^2 - 4\times(-0{,}1)\times(-100) = 176{,}89 - 40 = 136{,}89 = 11{,}7^2$
$x_1 = \frac{-13{,}3-11{,}7}{-0{,}2} = \frac{-1{,}6}{-0{,}2} = 8$
$x_2 = \frac{-13{,}3-11-7}{-0{,}2} = \frac{-25}{-0{,}2} = 125$
Le coefficient de x² est négatif, on donne le signe de B(x) sous la forme d'un tableau.

X	0		8		125		160
B(x)		−	0	+	0	−	

Le bénéfice de l'artisan est positif si et seulement le nombre de kilos x de confiture appartient à l'intervalle [8;125].

3.a. $B(x) = -0{,}1x^2 + 13{,}3x - 100$
B'(x)=-0,2x+13,3

3.b. $B'(x) = 0 \Leftrightarrow -0{,}2x + 13{,}3 = 0 \Leftrightarrow 13{,}3 = 0{,}2x \Leftrightarrow x = \frac{13{,}3}{0{,}2} = 66{,}5$

$B'(x) > 0 \Leftrightarrow -0{,}2x + 13{,}3 > 0 \Leftrightarrow 13{,}3 > 0{,}2x \Leftrightarrow \frac{13{,}3}{0{,}2} > x \Leftrightarrow 66{,}5 > x$

$B'(x) < 0 \Leftrightarrow 66{,}5 < x$

Tableau de variation de B

x	0		66.5		160
B'(x)		+	0	−	
B(x)	B(0)	↗	B(66.5)	↘	B(160)

B(0)=-100 B(160)=-532 B(66,5)=1126,675

3.c. L'artisan doit vendre **66,5** kilos de confiture pour avoir un bénéfice maximal.
Le montant de ce bénéfice maximal est égal à **1126,68€.**

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

EXERCICE 4 (5 points)

On dispose d'un dé équilibré à six faces et de deux urnes contenant des boules blanches ou rouges indiscernables au toucher.
L'urne U contient 40 boules blanches et 60 boules rouges.
L'urne V contient 70 boules blanches et 30 boules rouges.

Un jeu consiste à lancer le dé puis une boule dans l'une des urnes. Si on obtient 1 ou 6 sur le dé le tirage s'effectue dans l'urne U. Si on obtient 2, 3, 4 ou 5 sur le dé, le tirage s'effectue dans l'urne V.

On considère les événements :
U : « le tirage s'effectue dans l'urne U »
V : « le tirage s'effectue dans l'urne V »
B : « la boule tirée est blanche »
R : « la boule tirée est rouge ».

Sauf indication contraire, les probabilités seront arrondies au millième.

1. Représenter la situation à l'aide d'un arbre pondéré.

2. Déterminer la probabilité de l'événement : « la boule tirée est rouge ».

3. On tire une boule rouge. Quelle est la probabilité qu'elle ait été tirée dans l'urne U ?

4. Pour jouer, il faut miser 1€. Le joueur gagne 3€ s'il tire une boule rouge et ne gagne rien s'il tire une boule blanche.
On note G la variable aléatoire donnant le gain du joueur.

4.a. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire G.
On donnera le tableau de probabilités, mais aucune justification n'est demandée.

4.b. Calculer l'espérance mathématique de G.
Interpréter ce résultat.

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

CORRECTION

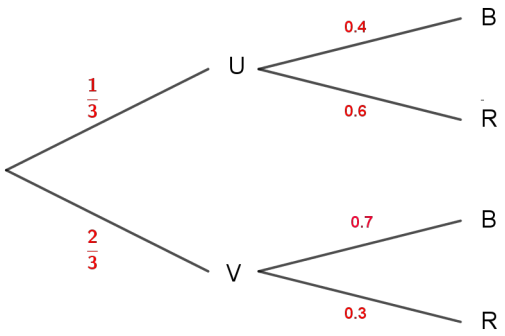
1. Le dé est équilibré donc la probabilité d'obtenir 1 ou 6 est égale à $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ et la probabilité d'obtenir 2, 3, 4 ou 5 est égale à $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$.

On a donc $P(U)=\frac{1}{3}$ $(=0{,}333)$ et $P(V)=\frac{2}{3}$ $(=0{,}667)$.

Les boules des urnes sont indiscernables au toucher donc :

$P_U(B)=\frac{40}{100}=0{,}4$ et $P_U(R)=\frac{60}{100}=0{,}6$ et $P_V(B)=\frac{70}{100}=0{,}7$ et $P_V(R)=\frac{30}{100}=0{,}3$.

On obtient pour arbre pondéré :



2. En utilisant l'arbre pondéré ou la formule des probabilités totales

$P(R)=P(U\cap R)+P(V\cap R)=P(U)\times P_U(R)=P(V)\times P_V(R)=\frac{1}{3}\times 0{,}6+\frac{2}{3}\times 0{,}3=0{,}2+0{,}2=$ **0,4**

3. On nous demande de calculer $P_R(U)$

$P_R(U)=\frac{P(U\cap R)}{P(R)}=\frac{0{,}2}{0{,}4}=$ **0,5**

4.a. On détermine l'univers image de la variable aléatoire G.

Si le joueur tire une boule rouge alors il gagne 3-1= 2€ (pour obtenir le gain il faut enlever la mise).

Si le joueur tire une boule blanche alors il gagne 0-1= -1€ (il perd sa mise).

$P(G=2)=P(R)=0{,}4$ $P(G=-1)=P(B)=1-0{,}4=0{,}6$

On donne la loi de probabilité sous la forme d'un tableau.

g_i	-1	2
$P(G=g_i)$	0.6	0.4

4.b. $E(G)=-1\times 0{,}6+2\times 0{,}4=$ **0,2**

L'espérance mathématique étant positive, le joueur peut espérer un gain positif en effectuant un grand nombre de parties.

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés