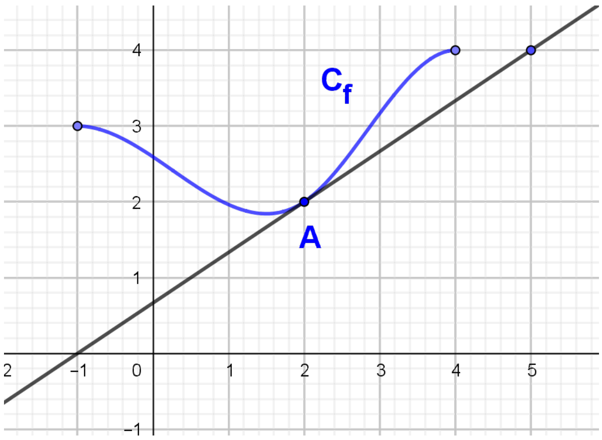
Sujet 48

EXERCICE 1 (5 points)

Cet exercice est un QCM et comprend cinq questions.
Pour chacune des questions, une seule des quatre réponses proposées est correcte.
Les questions sont indépendantes.
Pour chaque question, indiquer le numéro de la question et recopier la lettre correspondant à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée, mais il peut être nécessaire d'effectuer des recherches au brouillon pour aider à déterminer votre réponse.
Chaque réponse correcte rapporte un point. Une réponse incorrecte ou une question sans réponse n'apporte ni ne retire aucun point.

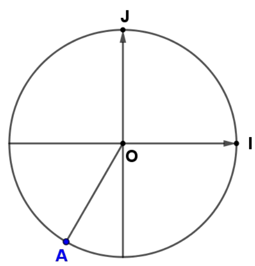
1. On considère une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-1;4]$. On a tracé sur la figure ci-dessous la courbe C_f et la tangente à cette courbe au point A de coordonnées $(2;2)$.



L'équation de la tangente à C_f au point A est :

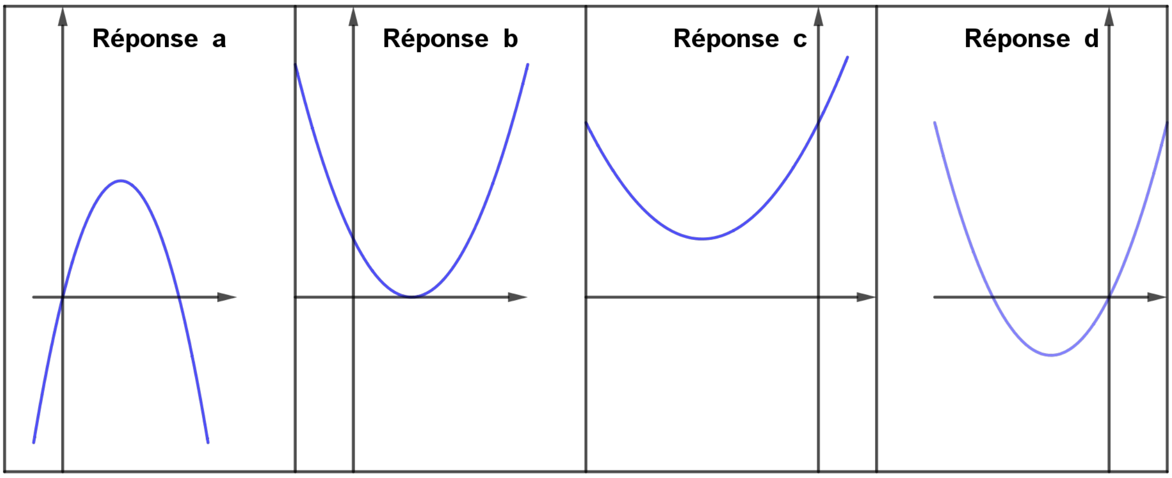
Réponse a	Réponse b	Réponse c	Réponse d
$y=\frac{2}{3}(x-2)+2$	$y=2(x-2)+\frac{2}{3}$	$y=\frac{2}{3}(x+2)+2$	$y=\frac{3}{2}(x-2)+2$

2. Dans un repère orthonormal (O;I;J), le point A placé ci-dessous sur le cercle trigonométrique de centre O d'origine I, est associé au nombre réel :



Réponse a	Réponse b	Réponse c	Réponse d
$\frac{11\pi}{6}$	$\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{3\pi}{4}$

3. On considère une fonction du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=ax^2+bx$ où a et b sont deux nombres réels strictement positifs.
Quelle est la courbe représentative de cette fonction dans un repère orthonormal ?



4. Dans un plan muni d'un repère orthonormal, une droite D a pour équation : x-2y=1.
Parmi les propositions suivantes, laquelle est correcte ?

Réponse a	Réponse b	réponse c	réponse d
le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite D	le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal de la droite D	le point de coordonnées A(1;-2) appartient à la droite D	l'ordonnée à l'origine de la droite D est égale à 1

5. Un homme marche pendant 10 jours, le premier jour , il parcourt 12 km ; Chaque jour il parcourt 500 m de moins que la veille.
Durant ces dix jours, il aura parcouru au total :

Réponse a	Réponse b	réponse c	Réponse d
95 km	97.5 km	19 km	84 km

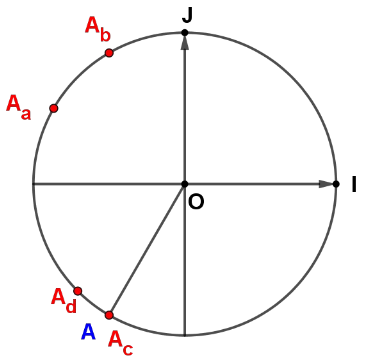
CORRECTION

1. **Question 1 :** **Réponse a**

   Preuve non demandée
   La droite T passe par les points A(2;2) et B(5;4), le coefficient directeur de la droite T est égal à :
   $\frac{y_B - y_a}{x_B - x_A} = \frac{4-2}{5-2} = \frac{2}{3}$.
   Donc les réponses b et d sont fausses.
   Pour $x=2$ pour la réponse a on obtient $y=2$
   pour la réponse c on obtient $y = \frac{8}{3} + 2 \neq 2$.
   Donc la réponse juste est la **réponse a.**

2. **Question 2 :** **Réponse c**

   Preuve non demandée
   On place sur le cercle trigonométrique les points :
   A_a pour $\frac{11\pi}{6}$, A_b pour $\frac{2\pi}{3}$, A_c pour $-\frac{2\pi}{3}$ et A_d pour $-\frac{3\pi}{4}$.



   $A = A_c$

3. **Question 3 :** **Réponse d**

   Preuve non demandée
   $f(x) = ax^2 + bx$ $a>0$ et $b>0$
   $f(0)=0$ donc la courbe représentative de f passe par l'origine du repère.
   $a>0$ donc f admet un minimum ;
   donc la réponse juste est la **réponse d.**

4. **Question 4 :** **Réponse b**

   Preuve non demandée
   D : $x-2y=1$ le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal de D.
   Donc la réponse juste est la **réponse b.**

5. **Question 5 :** **Réponse b**

   Preuve non demandée
   Pour tout entier naturel n compris entre 1 et 10, on note u_n la distance en km parcourue par l'homme le $n^{\text{ième}}$ jour. En particulier $u_1=12$.

Chaque jour l'homme parcourt 500 m de moins que la veille.
Pour tout entier naturel n compris entre 0 et 9, $u_{n+1}=u_n-0,5$ (500 m=0,5 km)
$u_1, \ldots, u_{10}$ sont les 13 premiers termes de la suite arithmétique de premier terme $u_1=12$ et de raison -0,5.
La distance totale en km parcourue pendant les 10 jours est :

$S=u_1+\ldots+u_{10}=\frac{10}{2}(u_1+u_{10})$.

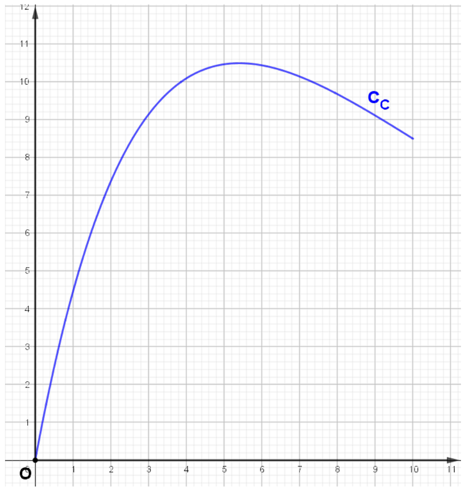
$u_1=12 \qquad u_{10}=u_1-9n=12-9\times0,5=12-4,5=7,5$

$S=5\times(12+7,5)=5\times19,5=97,5$

La réponse juste est la **réponse b.**

EXERCICE 2 (5 points)

Une entreprise fabrique chaque jour x tonnes d'un produit. Le coût total mensuel, en milliers d'euros, pour produire chaque jour x tonnes de ce produit est modilisé par la fonction C définie sur l'intervalle [0;10] par :
$C(x)=(5x-2)e^{-0,2x}+2$.
On a représenté ci-dessous la courbe C_C de la fonction C dans un repère.



1. Par lecture graphique, donner une estimation de la journalière de produit pour laquelle le coût total mensuel est maximal.

2. **Le coût marginal** C_m qui correspond au supplément de coût total pour la production d'une unité de valeur supplémentaire est assimilé à la **dérivée** de la fonction coût total.

2.a. Démontrer que le coût marginal C_m est définie sur l'intervalle [0;10] par : $C_m(x)=(-x+5,4)e^{-0,2x}$.

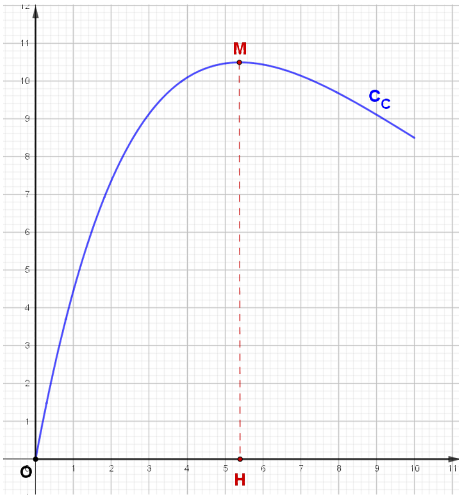
2.b. Pour quelle quantité de produit fabriqué par jour le coût marginal est-il négatif ?

2.c. Donner le tableau de la fonction C sur l'intervalle [0;10] ;

2.d. Déterminer le coût total mensuel maximal sur l'intervalle considéré. On donnera la valeur arrondie à l'euro près.

CORRECTIION

1.



On détermine le point M de la courbe C_C ayant une ordonnée maximale.
Pour déterminer l'abscisse du point M on place le point H (projeté orthogonal de M sur l'axe des abscisses). Puis on lit l'abscisse du point H. On obtient **5.4.**

2.a. Pour tout nombre réel x de l'intervalle [0;10], $C(x)=(5x-2)e^{-0,2x}$

$(5x-2)'=5$ $(e^{-0,2x})'=-0,2e^{-0,2x}$

$C'(x)=5e^{-0,2x}+(5x-2)(-0,2e^{-0,2x})=5e^{-0,2x}+(-x+0,4)e^{-0,2x}=(-x+5,4)e^{-0,2x}$.

$\mathbf{C_m(x)=(-x+5,4)e^{-0,2x}}$.

2.b. Pour tout nombre réel x de l'intervalle [0;10], $e^{-0,2x}>0$ donc le signe de $C_m(x)$ est le signe de $(-x+5,4)$.

$-x+5,4<0 \Leftrightarrow 5,4<x$

$C_m(x)<0 \Leftrightarrow 5,4<x\leqslant 10$.

Le coût marginal moyen est négatif pour une quantité supérieure à **5,4 tonnes** de produit fabriqué.

2.c. $-x+5,4=0 \Leftrightarrow x=5,4$

$-x+5,4>0 \Leftrightarrow 5,4>x$

x	0	5.4	10
$C'(x)$	+	0	−
$C(x)$	0 ↗	$C(5..4)$	↘ $C(10)$

$C(0)=0$ $C(5,4)=25e^{-1,08}+2$ $C(10)=48e^{-2}+2$

2.d. $C(5,4)=25e^{-1,08}+2=10,490$ à 10^{-3} près.

Le coût total mensuel maximal est 10490 € .

EXERCICE 3 (5 points)

On considère qu'en 2019, 3 300 000 personnes étaient atteintes de diabète en France.
Pour étudier l'évolution de la maladie, des chercheurs appliquent un modèle selon lequel le nombre de personnes atteintes augmente de 2 % par an.
On note u_n le nombre de personnes atteintes de diabète en France selon ce modèle durant l'année (2019+n).
On a donc u_0=3 300 000.

1. Justifier que, selon ce modèle, le nombre de personnes atteintes de diabète en France sera de 3 433 320 en 2021.

2. Quelle est la nature de la suite (u_n) ?

3. Donner l'expression de u_n en fonction de n.

4. En déduire le nombre de personnes qui, selon ce modèle, serait atteintes de diabète en France en 2025.

5. On définit un langage Python la fonction suivante :

```
def seuil(S):
    u=3300000
    n=0
    while u<S:
        u=u*1.02
        n=n+1
    return n
```

Après exécution dans la console on obtient l'affichage suivant :

```
>>>   seuil(5000000)
21
```

Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

CORRECTION

1. $u_1 = u_0 + \frac{2}{100} \times u_0 = 3300000 + 2 \times 33000 = 3300000 + 66000 = 3366000$

$u_2 = u_1 + \frac{2}{100} \times u_1 = 3366000 + 2 \times 33660 = 3366000 + 67320 = 3433320$

Le nombre de personnes atteintes de diabète en France en 2021 sera égal à 3 433 320.

2. Pour tout entier naturel n :

$u_{n+1} = u_n + \frac{2}{100} \times u_n = u_n + 0{,}02 \times n_n = 1{,}02\, u_n$

(u_n) est la suite géométrique de raison $q=1{,}02$ et de premier terme $u_0=3300000$.

3. Pour tout entier naturel n :

$u_n = u_0 x q^n = 3300000 x 1{,}02^n$

4. 2025=2019+6.

Le nombre de personnes atteintes de diabète en France en 2025 est égal à :
$u_6 = 3300000 x 1{,}02^6 = 3716336$ arrondi à l'unité.

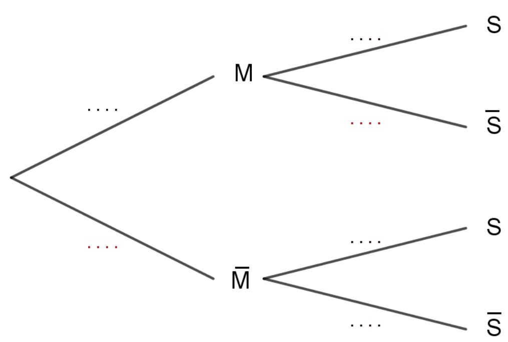
5. seuil(5000000) permet de déterminer le nombre d'années nécessaire pour que le nombre de personnes atteintes de diabète en France soit supérieur ou égal à 5000000.
L'exécution du programme nous donne 21.
2019+21=2040
Le nombre de personnes atteintes du diabète en France sera, pour la première année, en 2040 supérieur ou égal à 5 000 000.

EXERCICE 4 (5 points)

Dans un aéroport, les portiques de sécurité servent à détecter les objets métalliques que peuvent avoir les voyageurs.
On choisit au hasard un voyageur franchissant le portique.
On note :
. S l'événement « le voyageur fait sonner le portique » ;
. M l'événement « le voyageur porte un objet métallique ».
On note $\bar{S}$ et $\bar{M}$ les événements contraires de S et M.
On considère qu'un voyageur sur 500 porte sur lui un objet métallique.
On admet que :
. lorsqu'un voyageur franchit le portique avec un objet métallique, la probabilité que le portique sonne est égale à 0,95.
. lorsqu'un voyageur franchit le portique sans objet métallique, la probabilité que le portique ne sonne pas est égale à 0,96.

1. À l'aide des données de l'énoncé, préciser les valeurs de $P(M)$, $P_M(S)$ et $P_{\bar{M}}(\bar{S})$

2. Recopier est compléter l'arbre pondéré ci-dessous, modélisant cette situation.



3. Montrer que P(S)=0,04182.

4. En déduire la probabilité qu'un voyageur porte un objet métallique sachant qu'il a fait sonner le portique en passant.

5. Les événements M et S sont-ils indépendants ?

CORRECTION

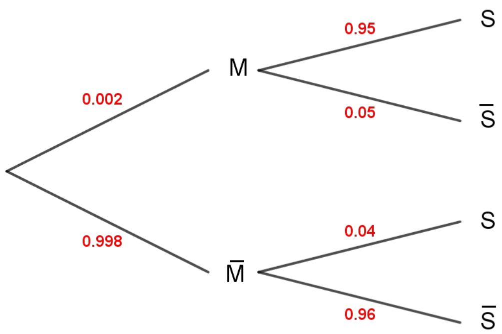
1. L'énoncé précise :

- Un voyageur sur 500 porte un objet métallique donc $P(M)=\frac{1}{500}=$ **0,002.**
- Lorsqu'un voyageur franchit le portique avec un objet métallique, la probabilité que portique sonne est égale à 0,95 donc $P_M(S)=0{,}95$.
- Lorsqu'un voyageur franchit le portique sans objet métallique, la probabilité que le portique ne sonne pas est égale à 0,96 donc $P_{\bar{M}}(\bar{S})=0{,}96$.

2. $P(\bar{M})=1-P(M)=1-0{,}002=$ **0,998**

$P_M(\bar{S})=1-P_M(S)=1-0{,}95=$ **0,05**

$P_{\bar{M}}(S)=1-P_{\bar{M}}(\bar{S})=1-0{,}96=$ **0,04**



3. En utilisant l'arbre pondéré ou le théorème des probabilités totales.

$P(S)=P(M\cap S)+P(\bar{M}\cap S)=P(M)\times P_M(S)+P(\bar{M})\times P_{\bar{M}}(S)$

$P(S)=0{,}002\times 0{,}95+0{,}998\times 0{,}04=0{,}0019+0{,}03992=$ **0,04182**

4. On nous demande de calculer $P_S(M)$.

$P_S(M)=\frac{P(S\cap M)}{P(S)}=\frac{0{,}0019}{0{,}0182}=\frac{190}{4182}=$ **0,045** arrondi au millième.

5. $P(M\cap S)=0{,}0019=1{,}9\times 10^{-3}$

$P(M)\times P(S)=0{,}002\times 0{,}04182=0{,}00008364=8{,}364\times 10^{-5}$

$P(M\cap S)\neq P(M)\times P(S)$

Les événements M et S ne sont pas indépendants.