Sujet 49

EXERCICE 1 (5 points)

Cet exercice est un QCM et comprend cinq questions.
Pour chacune des questions, une seule des quatre réponses proposées est correcte.
Les questions sont indépendantes.
Pour chaque question, indiquer le numéro de la question et recopier la lettre correspondant à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée, mais il peut être nécessaire d'effectuer des recherches au brouillon pour aider à déterminer votre réponse.
Chaque réponse correcte rapporte un point. Une réponse incorrecte ou une question sans réponse n'apporte ni ne retire aucun point.

1. On considère la droite d dont une équation dans un repère orthonormé est : $2x-3y+4=0$.

a) Un vecteur directeur de d est $\vec{u}\begin{pmatrix}-6\\4\end{pmatrix}$

b) Un vecteur normal de d est $\vec{n}\begin{pmatrix}-12\\18\end{pmatrix}$

c) Le point C(-5;2) appartient à la droite d.

d) La droite d coupe la droite d'équation $-x+3y-2=0$ au point F(1;2).

2. Dans un repère orthonormé le cercle $\mathscr{C}$ a pour équation $x^2-2x+y^2+y=3$ et la droite D d'équation $y=1$.

a) $\mathscr{C}$ et D n'ont aucun point d'intersection

b) $\mathscr{C}$ et D ont un seul point d'intersection

c) $\mathscr{C}$ et D ont deux points d'intersection

d) on ne peut pas savoir combien $\mathscr{C}$ et D ont de points d'intersection.

3. La fonction f est la fonction définie sur l'ensemble des réels par $f(x)=\cos(2x)$.

a) f est paire

b) f est impaire

c) f n'est ni paire ni impaire

d) f a pour période $\frac{\pi}{2}$.

4. Soit la suite (u_n) définie par $u_0=1$ et pour tout entier naturel n par $u_{n+1}=\frac{1}{2}\left(u_n+\frac{2}{u_n}\right)$.

On définit en langage Python une fonction « suite » pour calculer u_n connaissant n.

a)	b)	c)	d)

def suite(n):
  u=0
  for i in range(1,n+1):
    u=1/2*(u+2/u)
  return u
	def suite(n):
	  u=1
	  for i in range(1,n+1):
	    u=1/2*(u+2/u)
	  return n
		def suite(n):
		  u=1
		  for i in range(1,n+1):
		    u=1/2*u+2/u
		  return u
			def suite(n):
			  u=1
			  for i in range(1,n+1)::
			    u=1/2*(u+2/u)
			  return u

5. L'équation : $e^x=1$

a) n'a pas de solution

b) a pour solution le nombre 1

c) a pour solution le nombre 0

d) a pour solution le nombre e

CORRECTION

1. Réponse : b

Preuve non demandée

d : 2x-3y+4=0

$\vec{N}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à d.

$\vec{U}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d.

$\vec{u}$ n'est pas colinéaire à $\vec{U}$.

$\vec{n}=-6\vec{N}$ donc $\vec{n}$ est un vecteur normal d.

C(-5;2) n'appartient pas à d car $2\times(-5)-3\times2+4=-12\neq0$.

F(1;2) n'appartient pas à la droite d'équation : -x+3y-2=0 car $-1+3\times2-2=3\neq0$.

2. Réponse : c

Preuve non demandée

$$x^2-2x+y^2+y=3 \Leftrightarrow (x-1)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2-1-\frac{1}{4}=3 \Leftrightarrow (x-1)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{17}{4}$$

$\mathscr{C}$ est le cercle de centre $A\left(1;-\frac{1}{2}\right)$ et de rayon $R=\frac{\sqrt{17}}{2}$.

Pour déterminer l'intersection du cercle $\mathscr{C}$ et la droite D, on résout le système :

$$\begin{cases}x^2-2x+y^2+y=3\\ y=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2+2x+2=3\\ y=1\end{cases}$$

$x^2-2x-1=0$ $\quad\Delta=4-4\times(-1)\times1=8=(2\sqrt{2})^2$

$x_1=\frac{2-2\sqrt{2}}{2}=1-\sqrt{2}$ $\quad x_2=1+\sqrt{2}$

Donc $\mathscr{C}$ et D ont deux points d'intersection.

3. Réponse : a

Preuve non demandée

Pour tout nombre réel x : $f(-x)=\cos(-2x)=\cos(2x)=f(x)$ donc f est paire.

4. Réponse : d

Preuve non demandée

a) Réponse FAUSSE car u=0 alors pour i=1 on ne peut pas calculer u.

b) Réponse FAUSSE car on doit écrire return u et non return n (on veut calculer u).

c) Réponse FAUSSE car $u=\frac{1}{2}\times u+\frac{2}{u}$ et non $u=\frac{1}{2}\times\left(u+\frac{2}{u}\right)$.

d) Réponse VRAIE

5. Réponse : c

Preuve non demandée

$1=e^0$ donc $e^x=1 \Leftrightarrow e^x=e^0 \Leftrightarrow x=0$

EXERCICE 2 (5 points)

Dans cet exercice, les résultats sont arrondis au centième.

Un gérant d'un salon de thé achète des boîtes de thé vert chez deux fournisseurs.
Il achète $80\ \%$ de ses boîtes chez le fournisseur « Au thé de qualité » et $20\ \%$ de ses boîtes proviennent du fournisseur « Bon thé ».

Des contrôles de qualité montrent que $10\ \%$ des boîtes provenant du fournisseur « Au thé de qualité » présentent des traces de pesticides et que $20\ \%$ de celles ptovenant du fournisseur « Bon thé » présentent aussi des traces de pesticides.

On prélève au hasard une boîte du stock du gérant et on considère les événements suivants :
A : « la boîte provient du fournisseur « Au thé de qualité » » ;
B : « laboîte provient du fournisseur « Bon thé » ;
T : « la boîte présente des traces de pesticides ».

1. Traduire l'énoncé à l'aide d'un arbre pondéré.

2. Quelle est la probabilité que la boîte provienne de la boîte A et contienne des traces de pesticides.

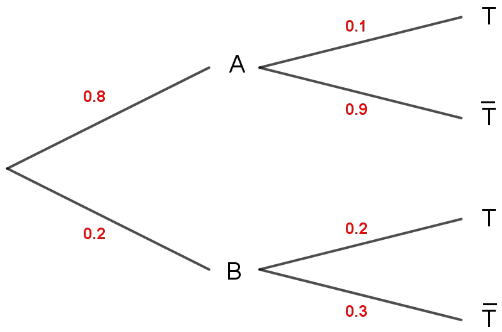
3. Que représente l'événement $B \cap \overline{T}$? Quel est la probabilité de cet événement ?

4. Justifier que la probabilité que la boîte ne présente aucune trace de pesticide est égale à 0,88.

5. On constate que la boîte prélevée présente des traces de pesticides. Quelle est la probabilité que cette boîte provienne du fournisseur « Bon thé » ?

CORRECTION

1. On a $\bar{A}=B$ ou $A=\bar{B}$
Le gérant achète 80 % de ses boîtes au fournisseur « Au thé de qualité » donc $P(A)=0{,}8$.
Le gérant achète 20 % de ses boîtes au fournisseur « Bon thé » donc $P(B)=0{,}2$.
On vérifie $0{,}8+0{,}2=1$.
10 % des boîtes provenant du fournisseur « Au thé de qualité » présentent des traces de pesticides donc :
$P_A(T)=0{,}1$ et $P_A(\bar{T})=1-P_A(T)=1-0{,}1=0{,}9$.
20 % des boîtes provenant du fournisseur « Bon thé » présentent des traces de pesticides donc :
$P_B(T)=0{,}2$ et $P_B(\bar{T})=1-P_B(T)=1-0{,}2=0{,}8$.
On obtient, l'arbre pondéré suivant :



2. On nous demande de calculer : $P(A\cap T)$.
$P(A\cap T)=P(A)\times P_A(T)=0{,}8\times 0{,}1=0{,}08$.

3. L'événement $B\cap\bar{T}$ est l'événement : la boîte prélevée provient du fournisseur « Bon thé » et ne contenant pas de traces de pesticides.
$P(B\cap\bar{T})=P(B)\times P_B(\bar{T})=0{,}2\times 0{,}8=0{,}16$.

4. En utilisant l'arbre pondéré ou le théorème des probabilités totales :
$P(\bar{T})=P(A\cap\bar{T})+P(B\cap\bar{T})=P(A)\times P_A(\bar{T})+0{,}16=0{,}8\times 0{,}9+0{,}16=0{,}72+0{,}16$
$P(\bar{T})=0{,}88$.

5. On nous demande de calculer $P_T(B)$.
$$P_T(B)=\frac{P(T\cap B)}{P(T)}$$
$P(T\cap B)=P(B)\times P_B(T)=0{,}2\times 02=0{,}04$
$P(T)=1-P(\bar{T})=1-0{,}88=0{,}12$.
$P_T(B)=\frac{0{,}04}{0{,}12}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}=0{,}33$ (arrondi au centième).

EXERCICE 3 (5 points)

Un propriétaire propose à un commerçant deux types de contrat pour la location d'un local pendant 3 ans.
1er contrat : un loyer de 200€ pour le premier mois puis une augmentation de 5€ par mois jusqu'à la fin du bail.
2ème contrat : un loyer de 200 € pour le premier mois de puis une augmentation de 2 % par mois jusqu'à la fin du bail.
On modélise ces deux contrats par les suites (u_n) et (v_n) de sorte que pour tout entier $n \geqslant 1$, le prix du loyer le $n^{\text{ième}}$ mois avec le 1^{er} contrat est représenté par u_n et le prix du loyer le $n^{\text{ième}}$ mois avec le $2^{\text{ème}}$ contrat est représenté par v_n .
On a ainsi $u_1 = v_1 = 200$.

1. Calculer, pour chacun des deux contrats, le loyer du deuxième mois et le loyer du troisième mois.

2. Le commerçant a écrit un programme en langage Python qui lui permet de déterminer u_n et v_n pour une valeur donnée de n.

```
1 u=200
2 v=200
3 n=int(input("saisir une valeur de n:"))
4 for i in range(1,n):
5 u= . . . .
6 v= . . . .
7 print("pour n=",n,"on a","u=",u,"et v=",v)
```

2.a. Recopier et compléter les lignes 5 et 6 de ce programme.

2.b. Quels nombres obtiendra-t-on avec n=4 ?
2

3. Déterminer, pour tout entier $n \geqslant 1$, l'expression de u_n et v_n en fonction de n.

4. Quel contrat coûtera le moins cher au total pour l'ensemble du bail de 3 ans ?

CORRECTION

1. 1^{er} contrat :.
le deuxième mois : $200+5=205$ €
le troisième mois : $205+5=210$ € .

. $2^{ème}$ contrat :

le deuxième mois : $200+\frac{2}{100}\times 200=200+4=204$ €

le troisième mois : $204+\frac{2}{100}\times 204=204+4,08=208,08$ € .

2.a.

```
1  u=200
2  v=200
3  n=int(input("saisir une valeur de n:"))
4  for i in range(1,n):
5  u= u+5
6  v= 1.02*v
7  print("pour n=",n,"on a","u=",u,"et v=",v)
```

2.b. Pour n=4 on obtient : $u=215$ et $208,08+4,16=212,24$ (arrondi au centième).

3. Pour tout entier naturel $n\geqslant 1$, $u_{n+1}=u_n+5$ donc (u_n) est la suite arithmétique de 1^{er} terme $u_1=200$ et de raison r=5.
Pour tout entier naturel $n\geqslant 1$, $u_n=200+(n-1)\times 5=200-5+5n=195+5n$.
Pour tout entier naturel $n\geqslant 1$, $v_{n+1}=1,02\times u_n$ donc (v_n) est la suite géométrique de premier terme $v_1=200$ et de raison q=1,02.
Pour tout entier naturel $n\leqslant 1$, $v_n=v_1\times q^{n-1}=200\times 1,02^{n-1}$.

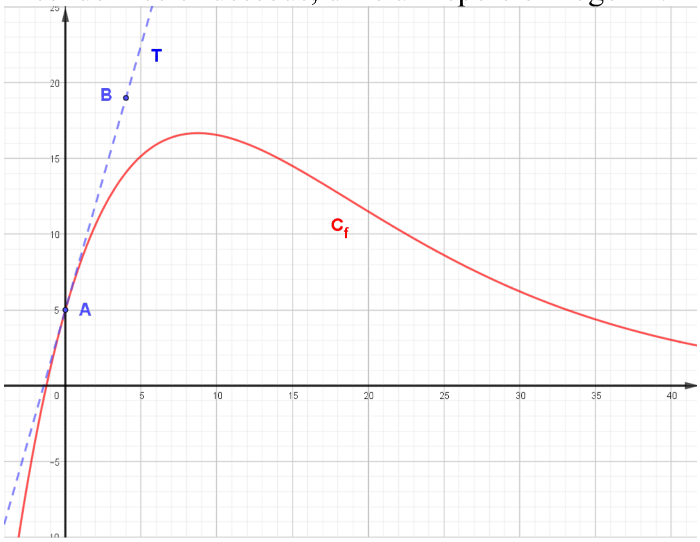
4. $S_1= u_1+ u_2+ \ldots +u_{35}+u_{36}$
$\underline{S_1=u_{36}+u_{35}+ \ldots +u_2 + u_1}$
$2S_1=(u_1+u_{36})x36$
$S_1=(u_1+u_{36})\times 18=18\times(200+195+36\times 5)=18\times(200+195+180)=18\times 575$
$S_1=10350$

$S_2=v_1+v_2+\ldots+v_{35}+v_{36}$
$\underline{-1,02S_2= \quad - v_2 - v_3 - \ldots - v_{36} - v_{37}}$
$-0,02S_2= v_1 - v_{37}$
$v_1 - v_{37}=200-200x1,02^{36}=200(1-1,02^{36})$
$S_2= - \frac{200}{0,02}(1-1,02^{36})=10000(1,02^{36}-1)$
$S_2=10398,87$ arrondi au centième.

Le premier contrat coûtera moins cher au total pour l'ensemble du bail.

EXERCICE 4 (5 points)

On considère la fonction f définie sur ℝ par $f(x)=(ax+b)e^{-0,1x}$ où a et b sont des réels fixés.
La courbe C_f de la fonction f est donnée ci-dessous, dans un repère orthogonal.



On a également représenté la tangente T à C_f point A(0;5).
On admet que cette tangente passe par le point B(4;19).

1. Exprimer f(0), déterminer la valeur de b.

2.a. À l'aide des coordonnées des points A et B, déterminer une équation de la droite T.

2.b. Exprimer, pour tout réel x, $f'(x)$ en fonction de x et de a et en déduire que pour tout réel x, $f(x)=(4x+5)e^{-0,1x}$.

3. On souhaite déterminer le maximum de la fonction f sur ℝ.

3.a. Montrer que pour tout mombre réel x, $f'(x)=(-0,4x+3,5)e^{-0,1x}$.

3.b. Déterminer les variations de f sur ℝ et en déduire le maximum de f sur ℝ.

CORRECTION

1. Pour tout nombre réel x, $f(x)=(ax+b)e^{-0,1x}$.

$f(0)=(a\times 0+b)e^{0}=b$

Le point A(0:5) appartient à C_f donc f(0)=5.

Conséquence : $b=5$.

2.a. A(0;5) B(4;19)

T=(AB) $x_A \neq x_B$ donc T : y=mx+p.

$m=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{19-5}{4-0}=\frac{14}{4}=3,5$.

A appartient à T donc $5=m\times 0+p \Leftrightarrow p=5$

$T: y=3,5x+5$

2.b. Pour tout x réel, $f(x)=(ax+5)e^{-0,1w}$.

$u(x)=ax+5$ $u'(x)=a$

$v(x)=e^{-0,1x}$ $v'(x)=-0,1e^{-0,1x}$

$f(x)=u(x)\times v(x)$ $f'(x)=u'(x)\times v(x)+u(x)\times v'(x)$

$f'(x)=a\times e^{-0,1x}+(ax+5)\times(-0,1e^{-0,1x})=(-0,1ax+a-0,5)e^{-0,1x}$

$f'(0)=a-0,5$

T est la tangente à C_f au point A(0;5) donc le coefficient directeur de T : m=3,5 est égal à $f'(0)$.

$a-0,5=3,5 \Leftrightarrow a=4$

donc $f(x)=(4x+5)e^{-0,1x}$.

3.a. Pour tout nombre réel x :

$f'(x)=(-0,1\times 4x+4-0,5)e^{-0,1x}=(-0,4x+3,5)e^{-0,1x}$

3.b. Pour tout nombre réel x, $e^{-0,1x}>0$ donc le signe de $f'(x)$ est le signe de -0,4x+3,5.

$-0,4x+3,5=0 \Leftrightarrow 0,4x=3,5 \Leftrightarrow x=\frac{35}{4}=8,75$

$-0,4x+3,5>0 \Leftrightarrow 3,5>0,4x \Leftrightarrow \frac{3,5}{0,4}>x \Leftrightarrow 8,75>x$

$-0,4x+3,5<0 \Leftrightarrow 3,5<0,4x \Leftrightarrow \frac{3,5}{0,4}<x \Leftrightarrow 8,75<x$.

x	-∞		8.75		+∞
f '(x)		+	0	–	
f(x)		↗		↘	

f(8,75) esr le maximum de f sur ℝ. $f(8,75)=(4\times 8,75+5)\times e^{-0,1\times 8,75}=40\times e^{-0,875}=16,67$