Sujet 5

EXERCICE 1 (5 points)

Cet exercice est un QCM et comprend cinq questions.
Pour chacune des questions, une seule des quatre réponses proposées est correcte.
Les questions sont indépendantes.
Pour chaque question, indiquer le numéro de la question et recopier la lettre correspondant à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée, mais il peut être nécessaire d'effectuer des recherches au brouillon pour aider à déterminer votre réponse.
Chaque réponse correcte rapporte un point. Une réponse incorrecte ou une question sans réponse n'apporte ni ne retire aucun point.

Question 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\sin(x)-x$.
Parmi les propositions suivantes, laquelle est vraie ?

a f est paire	b f est impaire	c Pour tout réel x f(x+2π)=f(x)	d Pour tout réel x f(x+π)=-f(x)

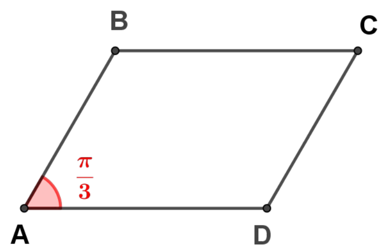
Question 2

Dans l'intervalle, $]-\pi;\pi]$, l'équation $2\cos(x)-\sqrt{3}=0$ a pour solutions :

a $-\frac{\pi}{6}$ et $\frac{\pi}{6}$	b $-\frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{4}$	c $-\frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{3}$	d $-\frac{2\pi}{3}$ et $\frac{2\pi}{3}$

Question 3

Soit ABCD un parallélogramme tel que $AB=3$, $AD=4$ et $\widehat{BAD}=\frac{\pi}{3}$.



Alors $\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{DC}$ est égal à :

a) 12	b) -12	c) 6	d) -6

Question 4

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.
On considère la droite (d_1) d'équation $3x-4y+1=0$.
La droite (d_2) perpendiculaire à (d_1) et passant par le point A(1;1) a pour équation :

a) 4x+3y=0	b) 4x+3y-7=0	c) x-y-2=0	d) -4x+3y+1

Question 5

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$;
Les droites (d) et (d') d'équations respectives $2x-y+5=0$ et $-4x+2y+7=0$ sont :

a) confondues	b) sécantes	c) parallèles	d) perpendiculaires

CORRECTION

Question 1 Réponse : b

Preuve non demandée

$f(-x)=\sin(-x)-(-x)=-\sin(x)+x=f(x)$

Question 2 Réponse ; a

Preuve non demandée

$x\in]-\pi;\pi]$

$2\cos(x)-\sqrt{3}=0 \Leftrightarrow \cos(x)=\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \left(x=-\frac{\pi}{6} \text{ ou } x=\frac{\pi}{6}\right)$

Question 3 Réponse : d

Preuve non demandée

$\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{DC}=DA\times DC\times\cos(\widehat{ADC})$

$DA=4 \quad DC=AB=3 \quad \widehat{ADC}=\pi-(\widehat{BAD})=\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}$

$\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}$

$\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{DC}=4\times3\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-6$.

Question 4 Réponse : b

Preuve non demandée

(d_1): $3x-4y+1=0$ $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (d_1) donc un vecteur normal à (d_2) .

(d_a): $4x+3y=0$ est perpendiculaire à (d_1) mais ne passe par A(1;1) car $4\times1+3\times1=7\neq0$.

(d_b): $4x+3y-7=0$ est perpendiculaire à (d_1) et (d_b) passe par A(1;1) car $4\times1+3\times1-7=0$.

Question 5 Réponse : c

Preuve non demandée

$\vec{N}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à (d).

$\vec{N}'\begin{pmatrix}-4\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à (d').

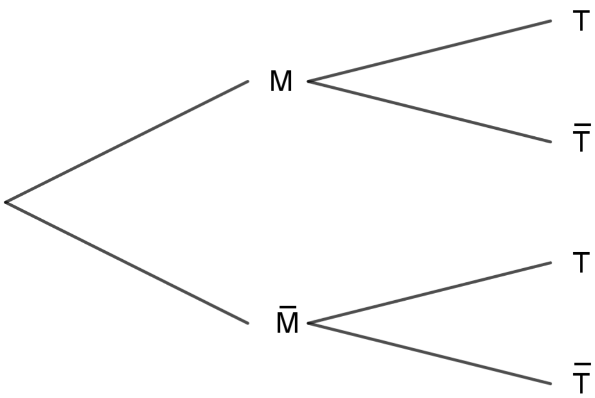
$\vec{N}'=-2\vec{N}$ donc les droites (d) et (d') sont parallèles.

(d) et (d') ne sont pas confondues car (d) passe par le point de coordonnées (0;5) et (d') passe le point de coordonnées (0 ;-3,5).

EXERCICE 2 (5 points)

Dns tout l'exercice, les résultats seront arrondis, si nécessaire, au dix millième.
On étudie un test de dépistage pour une certaine maladie dans une population donnée. On sait que $1\ \%$ de la population est atteint de la maladie.
Des études ont montré que si une personne malade, alors le test se révèle positif dans $97\ \%$ des cas et si une personne n'est pas malade, le test est négatif dans $98\ \%$ des cas.
Pour une personne à qui on fait passer le test de dépistage, on associe les événements suivants/
. M : la personne est malade ;
. T : le test est positif.

1. recopier et compléter sur la copie l'arbre de probabilité suivant en utilisant les données de l'exercice ;



2. Justifier que $P(\bar{M}\cap T)=0{,}0198$.

3. Montrer que $P(T)=0{,}0295$.

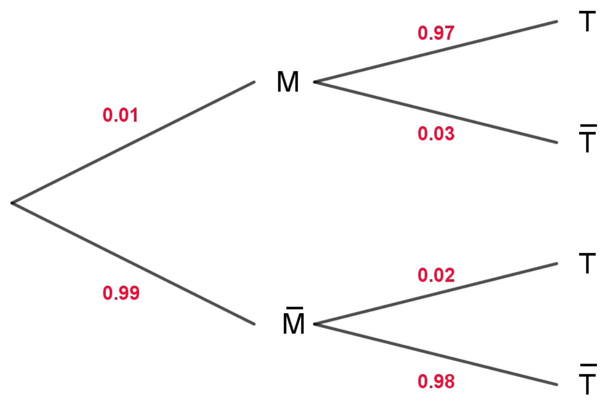
4. Calculer $P_T(M)$.

5. Une personne dont le test se révèle positif est-elle nécessairement atteinte par cette maladie ?

CORRECTION

1. L'énoncé précise :

- 1 % de la population est malade donc : $P(M)=\dfrac{1}{100}=0{,}01$ et $P(\bar{M})=1-P(M)=1-0{,}01=0{,}99$.
- Si une personne est malade alors le test se révèle positif dans 97 % des cas donc :
  $P_M(T)=\dfrac{97}{100}=0{,}97$ et $P_M(\bar{T})=1-P_M(T)=1-0{,}97=0{,}03$.
- Si une personne n'est pas malade alors le test est négatif dans 98 % des cas donc :
  $P_{\bar{M}}(\bar{T})=\dfrac{98}{100}=0{,}98$ et $P_{\bar{M}}(T)=1-P_{\bar{M}}(\bar{T})=1-0{,}98=0{,}02$
- Arbre de probabilités complété :



2. $P(\bar{M}\cap T)=P(\bar{M})\times P_{\bar{M}}(T)=0{,}99\times 0{,}02=0{,}0198$

3. En utilisant la formule des probabilités totales.
$P(T)=P(\bar{M}\cap T)+P(M\cap T)=0{,}0198+P(M)\times P_M(T)=0{,}0198+0{,}01\times 0{,}97$
$P(T)=0{,}0198+0{,}0097=0{,}0295$

4. $P_T(M)=\dfrac{P(M\cap T)}{P(t)}=\dfrac{0{,}0097}{0{,}0295}=0{,}3288$

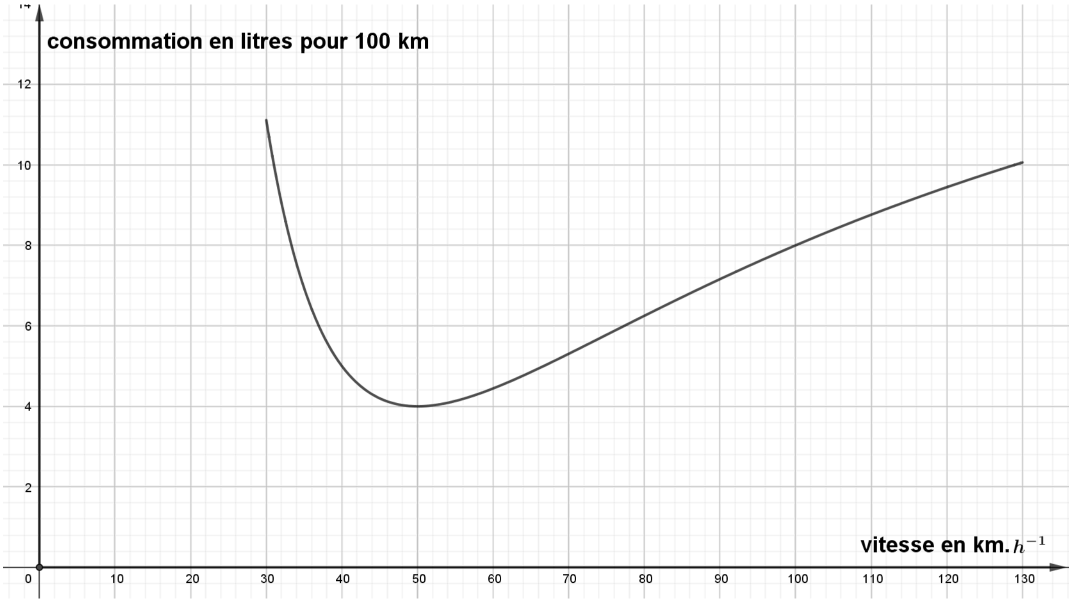
5. $P_T(\bar{M})=1-P_T(M)=1-0{,}3288=0{,}6712$
Donc une personne ayant un test positif a une probabilité de 0,6712 de ne pas être malade et une probabilité de 0,3288 d'être malade.
Une personne ayant un test positif n'est pas nécessairement malade.

EXERCICE 3 (5 points)

On s'intéresse à la consommation d'essence d'un véhicule en fonction de la vitesse.

Lecture graphique

Le graphique ci-dessous représente la consommation d'essence en litres pour 100 km en fonction de la vitesse en $km.h^{-1}$ du véhicule.



Avec la précision permise par le graphique, répondre aux question suivantes :

1. Quelle est la consommation du véhicule à $40\ km.h^{-1}$?

2. Pour quelle(s) vitesse(s) du véhicule consomme-t-il 8 litres por 100 km ?

3. Pour quelle vitesse la consommation du véhicule semble-t-elle minimale ?

Modélisation

Si on note x la vitesse du véhicule en $km.h^{-1}$, avec $30 \leqslant x \leqslant 130$, la consommation d'essence en litres est modélisée par la fonction f d'expression :

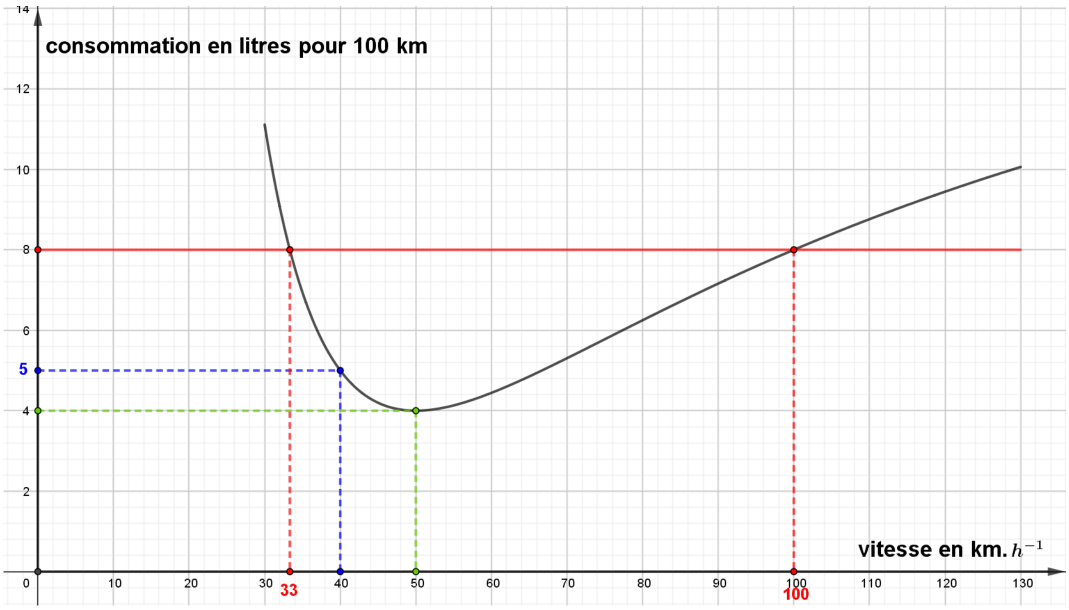
$$f(x)=\frac{20x^2-1600x+40000}{x^2} .$$

On désigne par f' la fonction dérivée de f sur l'intervalle $[30;130]$.

4. Montrer que pour tout $x \in [30;130]$, $f'(x)=\frac{800(2x-100)}{x^2}$.

5. Montrer la conjecture de la question 3.

CORRECTION



1. On détermine l'ordonnée du point de la courbe d'abscisse 40, on obtient : 5.
Le véhicule consomme 5 l au 100 km à la vitesse 40 km.h^{-1}.

2. On détermine les abscisses des points d'intersection de la courbe et de la droite d'équation : y=8.
On obtient : 33 et 100.
Pour que véhicule consomme 8 litres pour 100 km la vitesse doit être de 33 km.h^{-1} ou 100 km.h^{-1}.

3. On détermine graphiquement que la fonction est est minimale pour x=50, le minimum est égal à 4.
La consommation du véhicule est minimale pour la vitesse de 50 km.h^{-1}.

4. Pour $x\in[30;130]$ $f(x)=\dfrac{20x^2-1600x+40000}{x^2}=\dfrac{u(x)}{v(x)}$

$u(x)=20x^2-1600x+40000$ $\quad$ $u'(x)=40x-1600$

$v(x)=x^2$ $\quad$ $v'(x)=2x$

$$f'(x)=\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)'=\frac{u'(x)\times v(x)-u(x)\times v'(x)}{v^2}=\frac{(40x-1600)\times x^2-(20x^2-1600x+40000)\times(2x)}{(x^2)^2}$$

$$f'(x)=\frac{40x^3-1600x^2-40x^3+3200x^2-80000x}{x^4}=\frac{1600x^2-80000x}{x^4}$$

$$f'(x)=\frac{1600x-80000}{x^3}=\frac{800(2x-100)}{x^3}$$

5. Pour $30\leqslant x\leqslant 130$, le signe de $f'(x)$ est le signe de $2x-100$.
$2x-100=0 \Leftrightarrow x=50$
Si $30\leqslant x<50$ alors $f'(x)<0$ et la fonction f est décroissante sur [30;50[.
Si $50<x\leqslant 130$ alors $f'(x)>0$ et la fonction f est croissante sur]50;130].
La fonction f est minimale pour x=50.
La consommation du véhicule est minimale pour la vitesse de 50 km.h^{-1}.

EXERCICE 4 (5 points)

On considère une suite (u_n) définie pour tout entier naturel n, par $u_n=\frac{n+2}{n+1}$.

1. Calculer u_0, u_1, u_2 puis u_{99} .

2.a. Exprimer, pour tout entier n, u_n-1 en fonction de n.

2.b. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a :

$$u_{n+1}-u_n=\frac{-1}{(n+1)(n+2)} .$$

2.c. En déduire le sens de variation de la suite (u_n) .

3. Soit a un nombre réel dans l'intervalle]1;2].
Recopier et compléter sur la copie le programme Python suivant pour qu'il permette de déterminer le plus petit entier naturel n tel que $u_n \leqslant a$.

```
def seuil(a):
  n=0
while (n+2)/(n+1) . . a:
    n= . . ..
  return . . .
```

CORRECTION

1. $u_0=\frac{0+2}{0+1}=2$; $u_1=\frac{1+2}{1+1}=\frac{3}{2}=1,5$; $u_2=\frac{2+2}{2+1}=\frac{4}{3}$; $u_{99}=\frac{99+2}{99+1}=\frac{101}{100}=1,01$.

2.a. $u_n-1=\frac{n+2}{n+1}-1=\frac{n+2-(n+1)}{n+1}=\frac{1}{n+1}$

2.b. $u_{n+1}-u_n=\frac{n+3}{n+2}-\frac{n+2}{n+1}=\frac{(n+3)(n+1)-(n+2)(n+2)}{(n+2)(n+1)}$

$u_{n+1}-u_n=\frac{n^2+3n+n+3-(n^2+4n+4)}{(n+1)(n+2)}=\frac{-1}{(n+1)(n+2)}$

2.c. Pour tout entier naturel n, $(n+1)(n+2)>0$ donc $u_{n+1}-u_n<0 \Leftrightarrow u_{n+1}<u_n$.
La suite (u_n) est strictement décroissante.

3.

```
def seuil(a):
  n=0
while (n+2)/(n+1)> a:
    n= n+1
  return n
```

Si on exécute le programme pour a=1,01 on obtient : 99.
Si on exécute le programme pour a=1,0005 on obtient : 1999.