# Sujet 50

## EXERCICE 1 (5 points)

Cet exercice est un QCM et comprend cinq questions.
Pour chacune des questions, une seule des quatre réponses proposées est correcte.
Les questions sont indépendantes.
Pour chaque question, indiquer le numéro de la question et recopier la lettre correspondant à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée, mais il peut être nécessaire d'effectuer des recherches au brouillon pour aider à déterminer votre réponse.
Chaque réponse correcte rapporte un point. Une réponse incorrecte ou une question sans réponse n'apporte ni ne retire aucun point.

### Question 1

Pour tout réel x, l'expression $e^x \times e^{x+2}$ est égal à :

| | | | |
|---|---|---|---|
| a) $e^{2x+2}$ | b) $e^{x^2+2}$ | c) $e^{\frac{x}{x+2}}$ | d) $e^{x^2+x}$ |

### Question 2

Soit $g$ une fonction définie et dérivable en $1$. Dans un repère du plan, une équation de la tangente à la courbe de la fonction $g$ au point d'abscisse $1$ est :

| | |
|---|---|
| a) y=g(1)(x-1)-g '(1) | b) y=g '(1)(x-1)+g(1) |
| c) y=g '(1)(x+1)-g(1) | d) y=g(1)(x+1)+g '(1) |

### Question 3

Le plan est muni d'un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$. On considère la droite (d) de vecteur directeur $\vec{u}(4;7)$ passant par le point A(-2;3). Une équation de la droite (d) est :

| | | | |
|---|---|---|---|
| a) -7x+4y-26=0 | b) 4x+7y-13=0 | c) -7x+4y+26=0 | d) 4x-7y+29=0 |

### Question 4

$t$ est un réel. On sait que $\cos(-t)=\frac{2}{3}$. Alors $\cos(t+4\pi)+\cos(-t)$ est égal à :

| | | | |
|---|---|---|---|
| a) $-\frac{4}{3}$ | b) 0 | c) $\frac{4}{3}$ | d) $\frac{2}{3}$ |

### Question 5

On considère dans un repère du plan, la parabole (P) d'équation : $y=x^2+6x-9$.
La parabole (P) admet :

| | | | |
|---|---|---|---|
| a) aucun point d'intersection avec l'axe des abscisses | b) un seul point d'intersection avec l'axe des abscisses | c) deux points d'intersection avec l'axe des abscisses | d) trois points d'intersection avec l'axe des abscisses |

## CORRECTION

**Question 1 :** a

*Preuve non demandée*

$e^x \times e^{x+2} = e^{x+(x+2)} = e^{2x+2}$

**Question 2 :** b

*Preuve non demandée*

La tangente a pour coefficient directeur g'(1) et passe pat le point de coordonnées (1;g(1)).
Pour x=1 on a y=g(1).

**Question 3 :** a

*Preuve non demandée*

$\vec{u}(4;7)$ est un vecteur directeur de (d) : ax+by+c=0. On peut choisir a=-7 et b=4
(d) : -7x+4y+c=0
A(-2;3) appartient à (d) donc -7x(-2)+4x3+c=0 ⇔ c= -26
(d) : -7x+4y-26=0

**Question 4 :** c

*Preuve non demandée*

$\cos(t+4\pi)=\cos(t)$ car $4\pi=2\times 2\pi$
$\cos(-t)=\cos(t)$

donc $\cos(t+4\pi)+\cos(-t)=\cos(t)+\cos(t)=2\cos(t)=\frac{4}{3}$

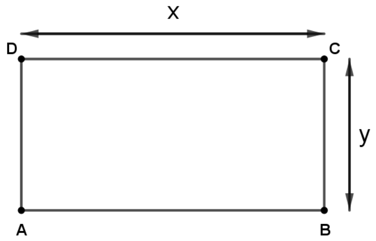
**Question 5 :** b

*Preuve non demandée*

L'abscisse d'un point d'intersection de la courbe représentative de f et de l'axe des abscisses est une solution de l'équation : $-x^2+6x-9=0$ .
Or $-x^2+6x-9=-(x-3)^2$
L'équation : $-(x-3)^2=0$ admet deux solutions confondues $x_1=x_2=3$ donc la courbe et l'axe des abscisses ont un seul point commun, le point A(-3;0).

## EXERCICE 2 (5 points)

Dans cet exercice, les distances sont exprimées en m².
On considère un rectangle d'aire 49 m² tel que DC=x et BC=y.
On admet que les nombres x et y sont strictement positifs.




On souhaite déterminer les dimensions x et y pour que le périmètre de ce rectangle soit minimal.

**1.a.** Montrer que le périmètre, en mètres, du rectangle ABCD est égal à $f(x)=2x+\frac{98}{x}$.

**1.b.** Calculer ce périmètre pour x=10.

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=2x+\frac{98}{x}$.
On admet que f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et on note $f'$ sa fonction dérivée.

**2.** Montrer que pour tout $x>0$, $f'(x)=\frac{2x^2-98}{x^2}$.

**3.** Déterminer le tableau de variations de la fonction f sur $]0;+\infty[$.

**4.** Endéduire les dimensions du rectangle d'aire 49 m² dont le périmétre est minimal.

## CORRECTION

**1.a.** Le rectangle ABCD a pour aire : $x \times y = 49 \ (\mathrm{m}^2)$

donc $y = \dfrac{49}{x} \quad (x \neq 0)$.

Le périmètre du rectangle ABCD est égal à : $2x + 2y = 2x + 2 \times \dfrac{49}{x} = 2x + \dfrac{96}{x} \ (\mathrm{m})$.

**1.b.** Pour x=10 on a $y = \dfrac{49}{10} = 4{,}9$ et le périmètre du rectangle ABCD est égal à : $20 + 9{,}8 = 29{,}8 \ (\mathrm{m})$.

**2.** Si $x > 0$ alors $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = \dfrac{-1}{x^2}$ donc $f'(x) = 2 + 98 \times \left(\dfrac{-1}{x^2}\right) = \dfrac{2x^2 - 98}{x^2}$.

**3.** $f'(x) = \dfrac{2(x^2 - 49)}{x^2} = \dfrac{2(x^2 - 7^2)}{x^2} = \dfrac{2(x+7)(x-7)}{x^2}$.

Si $x > 0$ alors $2(x+7) > 0$ et $x^2 > 0$ donc le signe de $f'(x)$ est le signe de (x-7).

$x - 7 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 7$

$x - 7 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x > 7$

$x - 7 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad (0 <)\ x < 7$

Tableau de variation de f.

| x | 0 | | 7 | | +∞ |
|---|---|---|---|---|---|
| f '(x) | ‖ | − | 0 | + | |
| f(x) | ‖ | ↘ | 28 | ↗ | |

**4.** $f(7) = 28$ est le minimum de f(x).

Le périmètre du rectangle ABCD d'aire 49 m² est minimal pour x=7.

On a alors $y = \dfrac{49}{7} = 7$.

Le périmètre du rectangle ABCD d'aire 49 m² est minimal lorsque ABCD est un carré de côté 7 m.

## EXERCICE 3 (5 points)

Un constructeur de véhicule fabrique deux types d'automobiles : « Citadine » ou « Routière ».
Pour ces véhicules, ce constructeur propose deux finitions :
. « Sport » au tarif de 2500 euros par véhicule
. « Luxe » au tarif de 4000 euros pat véhicule.

En consultant le carnet de commandes de ce constructeur, on recueille les indications suivantes :
. 80 % des clients ont commandé une automobile « Citadine ». Les autres clients ont commandé une automobile « Routière ».
. Parmi les clients possédant une automobile « Citadine », 70 % ont pris la finition « Sport ».
. Parmi les clients possédant une automobile « Routière », 60 % ont pris la finition « Luxe ».

On choisit un client au hasard et ont considère les événements suivants :
. C : « Le client a commandé une automobile « Citadine » ».
. L : « Le client a choisi la finition « Luxe » ».

D'une manière générale, on note $\bar{A}$ l'événement contraire de $A$.
On note X la variable aléatoire qui donne en euros le montant de la finition choisie par un client.

**1.** Construire l'arbre pondéré de probabilité traduisant les données de l'exercice.

**2.** Calculer la probabilité que le client ait commandé une automobile « Citadine » et ait choisi la finition « Luxe », c'est à dire calculer $P(C \cap L)$.

**3.** Justifier que $P(L)=0{,}36$.

**4.** La variable aléatoire $X$ ne prend que deux valeurs $a$ et $b$.

**4.a.** Déterminer les probabilités $P(X=a)$ et $P(X=b)$.

**4.b.** Déterminer l'espérance de $X$.

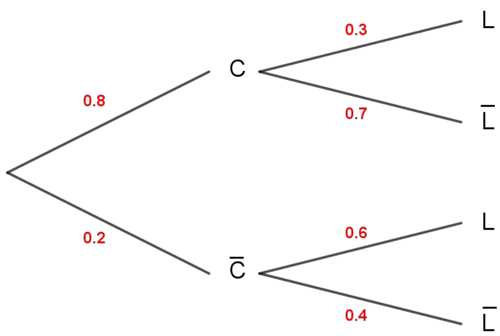
## CORRECTION

**1.** 80 % des clients ont commandé une automobile « Citadine» donc :
$P(C)=0,8$ et $P(\bar{C})=1-0,8=0,2$ .

**.** Parmi les clients possédant une automobile « Citadine », 70 % ont prisla finition « Sport » donc :
$P_C(\bar{L})=0,7$ et $P_C(L)=1-0,7=0,3$ .

**.** Parmi les clients possédant une automobile « Routière », 60 % ont pris la finition « Luxe » donc :
$P_{\bar{C}}(L)=0,6$ et $P_{\bar{C}}(\bar{L})=1-0,6=0,4$ .

**.** On obtient l'arbre pondéré suivant :




**2.** $P(C\cap L)=P(C)\times P_C(L)=0,8\times 0,3=0,24$ .

**3.** En utilisant l'arbre pondéré ou la formule des probabilités totales, on obtient :
$P(L)=P(C\cap L)+P(\bar{C}\cap L)=0,24+P(\bar{C})\times P_{\bar{C}}(L)=0,24+0,2\times 0,6=0,24+0,12$
$P(L)=0,36$ .

**4.a.** Pour la finition « Sport » a=2500.
Pour la finition « Luxe » b=4000.
$P(X=4000)=P(L)=0,36$
$P(X=2500)=P(\bar{L})=1-0,36=0,64$

**4.b.** $E(X)=4000\times 0,36+2500\times 0,64=1440+1600$
$E(X)=3040$ .

**EXERCICE 4 (5 points)**

Fanny est inscrite dans un club d'athlétisme. Elle pratique le penta bond (le penta bond est un enchaînement de cinq bonds après une prise d'élan).
La première semaine d'entraînement, Fanny réalise un saut de 8 m.
Chaque semaine, la longueur de son saut augmente de 0,1 m.
Pour $n$ entier naturel **non nul**, on note $s_n$ la longueur, en mètres, de son saut la $n^{\text{ième}}$ semaine d'entraînement.
Puisque lors de la première semaine d'entraînement, Fanny réalise un saut de 8 m, on a $s_1=8$.

**1.** Pour $n \geqslant 2$, on considère la fonction Python suivante :

```
det saut(n):
  s=8
  for k in range(2,n+1):
    s=s+0.1
  return s
```

**1.a.** Quelle valeur $s$ est-elle renvoyée par la commande saut(4) ?

**1.b.** Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

**2.** Exprimer avec justification $s_n$ en fonction de $n$, pour tout $n$ entier naturel non nul.

**3.** Pour être qualifiée à une compétition, Fanny doit faire un saut d'au moins 12 mètres.

**3.a.** À partir de quelle semaine, Fanny réalisera-t-elle un tel saut ?

**3.b.** Justifier votre réponse.

## CORRECTION

**1.a.** Pour $n=4$ k in range(2,5)
c'est à dire $k$ prend successivement les 3 valeurs 2, 3 et 4.
Pour $k=2$ $s=8,1$.
Pour $k=3$ $s=8,2$.
Pour $k=4$ $s=8,3$.
**La valeur de $s$ renvoyée par la commande saut(4) est : 8,3.**

**1.b.** **Pour la 4ème semaine d'entraînement, Fanny réalisera un saut de 8,3 m.**

**2.** Chaque semaine la longueur du saut de Fanny augmente de 0,1 m.
Donc pour tout entier naturel $n$, non nul, on a : $s_{n+1}=s_n+0,1$.
La suite $(s_n)$ est la suite arithmétique de premier terme $s_1=8$ et de raison $r=0,1$.
Pour tout entier naturel $n$, non nul, $s_n=s_1+0,1\times(n-1)=8-0,1n-0,1=7,9+0,1n$.

**3.** $s_n\geqslant 12 \Leftrightarrow 7,9+0,1n\geqslant 12 \Leftrightarrow 0,1n\geqslant 4,1 \Leftrightarrow n\geqslant\dfrac{4,1}{0,1} \Leftrightarrow n\geqslant 41$.
**Fanny réalisera un saut de longueur supérieur ou égal à 12 m à partir de la 41ème semaine.**