Sujet 51

EXERCICE 1 (5 points)

Cet exercice est un QCM et comprend cinq questions.
Pour chacune des questions, une seule des quatre réponses proposées est correcte.
Les questions sont indépendantes.
Pour chaque question, indiquer le numéro de la question et recopier la lettre correspondant à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée, mais il peut être nécessaire d'effectuer des recherches au brouillon pour aider à déterminer votre réponse.
Chaque réponse correcte rapporte un point. Une réponse incorrecte ou une question sans réponse n'apporte ni ne retire aucun point.

Question 1
Dans un repère orthonormé, le cercle de centre A(2;-1) et de rayon 4 a pour équation :

a)	$(x+2)^2+(y-1)^2=16$	b)	$(x-2)^2+(y+1)^2=4$
c)	$(x-2)^2+(y+1)^2=16$	d)	$(x+2)^2+(y-1)^2=4$

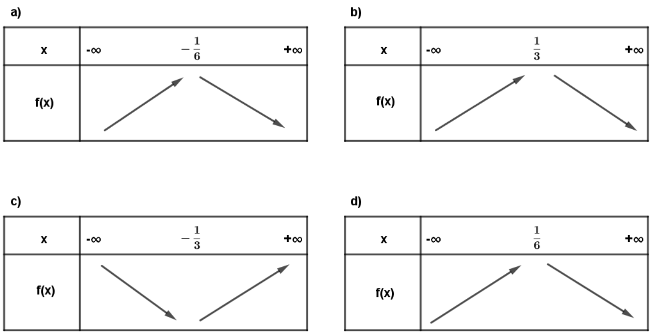
Question 2
Soit la droite (d) d'équation cartésienne 2x-y+1=0.
Sachant que la droite (d_1) est perpendiculaire à la droite (d), une équation de (d_1) peut être :

a) x-2y+2=0	b) x+2y-1=0	c) -2x+y-1=0	d) x-y+2=0

Question 3
L'expression $\sin(\pi-x)+\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ est égale à :

a) -2sin(x)	b) 0	c) 2sin(x)	d) cos(x)-sin(x)

Question 4
On considère la fonction polynôme du second degré f définie sur ℝ par : $f(x)=-3x^2+x-5$.
Le tableau de variations de la fonction f est :



Question 5
À un jeu, la variable aléatoire donnant le gain algébrique G suit la loi de probabilité suivante (en euros) :

Valeurs de G	-25	-5	x	100
Probabilité	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	0.3	0.2

Sachant que l'espérance de G est égale à $\frac{38}{3}$, la valeur de x est :

a) 0	b) 5	c) 20	d) 25

CORRECTION

Question 1 : c

Preuve non demandée

Une équation du cercle de centre $A(x_A ; y_A)$ et de rayon $R>0$ est : $(x-x_A)^2+(y-y_A)^2=R^2$.

Pour l'exemple donné on obtient : $(x-2)^2+(y-1)^2=4^2=16$

Question 2 : b

Preuve non demandée

$\vec{N}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à (d).

Si $\vec{N}_1$ est un vecteur normal à (d_1) alors (d) et (d_1) sont perpendiculaires si et seulement si $\vec{N}.\vec{N}_1=0$.

$\vec{N}_a\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$ $\vec{N}_b\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ $\vec{N}_c\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$ $\vec{N}_d\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$

$\vec{N}.\vec{N}_a=2\times1-1\times(-2)=4$ $\vec{N}.\vec{N}_b=2\times1-1\times3=0$

$\vec{N}.\vec{N}_c=2\times(-2)-1\times1=-5$ $\vec{N}.\vec{N}_d=2\times1-1\times(-1)=3$

donc $\vec{N}_1=\vec{N}_b$

Question 3 : a

Preuve non demandée

$\sin(\pi-x)=-\sin(x)$

$\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos(x)\times\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)-\sin(x)\times\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\sin(x)$

ou $\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left[\frac{\pi}{2}-(-x)\right]=\sin(-x)=-\sin(x)$

et $\sin(\pi-x)+\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=-2\sin(x)$

Question 4 : d

Preuve non demandée

$f(x)=-3x^2+x-5$ $f'(x)=-6x+1$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow -6x+1=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{6}$

$f'(x)>0 \Leftrightarrow -6x+1>0 \Leftrightarrow \frac{1}{6}>x$ donc f est croissante sur $\left]-\infty;\frac{1}{6}\right[$.

$f'(x)<0 \Leftrightarrow -6x+1<0 \Leftrightarrow \frac{1}{6}<x$ donc f est décroissante sur $\left]\frac{1}{6};+\infty\right[$.

Question 5 : b

Preuve non demandée

On peut vérifier que : $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+0,3+0,2=1$.

$E(G)=-25\times\frac{1}{3}-3\times\frac{1}{6}+x\times0,3+0,2\times100=\frac{38}{9} \Leftrightarrow -\frac{50}{6}-\frac{3}{6}+0,3x+\frac{120}{6}=\frac{76}{6}$

$\Leftrightarrow 0,3x=\frac{76}{6}+\frac{50}{6}+\frac{3}{6}-\frac{120}{6}=\frac{9}{6}=\frac{3}{2}=1,5 \Leftrightarrow x=\frac{1,5}{0,3}=\frac{15}{3}=5$

EXERCICE 2 (5 points)

Une note de musique est émise en pinçant la corde d'une guitare électrique. La puissance du son émis, initialement de 120 watts,diminue en fonction du temps écoulé après le pincement de la corde.
Soit f la fonction définie pour tout réel $t \geqslant 0$ par : $f(t)=120\,e^{-0,14\,t}$.
On admet que $f(t)$ modélise la puissance du son exprimée en watt, à l'instant t où t est le temps écoulé après le pincement de la corde.
On désigne par f' la fonction dérivée de f.

1. Calculer $f'(t)$.

2. Dresser le tableau de variation de f sur $[0;+\infty[$ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

3. Quelle sera la puissance du son ; trois secondes après avoir pincé la corde ?
Arrondir au dixième.

4. On considère la fonction seuil ci-dessous :

```
def seuil():
  t=0
  puissance=120
  while puissance<=60:
    t=t+0.1
    puissance=120*exp(-0.14*t)
  return t
```

Que renvoie cette fonction seuil ?

CORRECTION

1. $(e^u)' = u' \times e^u$

$f'(t) = 120 \times (-0{,}14) \times e^{-0{,}14t} = -16{,}8e^{-0{,}14t}$

2. Pour tout nombre réel t de l'intervalle $[0;+\infty[$, $e^{-0{,}14t} > 0$ donc $f'(t) < 0$.

$f(0) = 120e^0 = 120$ $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{-0{,}14t} = 0$ donc $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 0$.

Tableau de variations de f

t	0	$+\infty$
$f'(t)$	$-$	
$f(t)$	120 ↘	0

La puissance du son émis diminue lorsque le temps écoulé augmente.

3. $f(3) = 120e^{-0{,}14 \times 3} = 120e^{-0{,}42} = 78{,}8$ arrondi au dixième.

Trois secondes après avoir pincé la corde, le son émis aura pour puissance 78,8 watts.

4. La fonction seuil renvoie le temps écoulé (au dixième de seconde) pour lequel la puissance du son émis devient inférieure à 60 watts.

En exécutant le programme on obtient : 5s.

Remarque

En utilisant la calculatrice et si on arrondit au dixième on obtient :

$f(0{,}49) = 60{,}4$ $f(5) = 49{,}6$.

EXERCICE 3 (5 points)

Un journal hebdomadaire est sur le point d'être créé.
Une étude de marché aboutit à deux estimations différentes concernant le nombre de journaux vendus.

- $1^{ère}$ estimation : 1000 journaux vendus lors du lancement, puis une progression des ventes de 3 % chaque semaine.
- $2^{ème}$ estimation : 1000 journaux vendus lors du lancement, puis une progression régulière de 40 journaux supplémentaires vendus chaque semaine.

On considère les suites (u_n) et (v_n) telles que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, u_n représente le nombre de journaux vendus la $n^{ième}$ semaine selon la $1^{ère}$ estimation et v_n représente le nombre de journaux vendus la $n^{ième}$ semaine selon la $2^{ème}$ estimation.
Ainsi $u_1 = v_1 = 1000$.

1. On considère la feuille de calcul ci-dessous :

	A	B	C
1	n	u_n	v_n
2	1	1000	1000
3	2	1030	1040
4	3	1060.9	1080
5	4	1092.727	1120

Quelle formule, saisie en B3 et recopiée vers le bas, permet d'obtenir les termes de la suite (u_n) ?

2.a. Donner la nature de la suite (u_n) puis celle de la suite (v_n). Justifier.

2.b. Montrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $v_n = 960 + 40n$.

2.c. Écrire , pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, l'expression de u_n en fonction de n.

3. On définit, pour tout entier $n \geqslant 1$, la suite (w_n) par $w_n = v_n - u_n$.
On donne ci-dessous un extrait de son tableau de valeurs.

n	1	2		19	20	21	22
w_n	0	10		18	6	- 6	- 20

À partir de quelle semaine le nombre de journaux vendus d'après la première estimation devient-il supérieur au nombre de journaux vendus d'après la deuxième estimation.

CORRECTION

1. $=1{,}03\times B2$

car $u_2=u_1+\frac{3}{100}\times u_1=(1+0{,}03)\times u_1=1{,}03\times u_1$

2.a. Pour la première estimation, chaque semaine il y a une progression des ventes de 3 %.

Pour tout entier naturel $n\geqslant 1$, $u_{n+1}=u_n+\frac{3}{100}u_n=1{,}03\,u_n$

(u_n) est la suite géométrique de raison $q=1{,}03$ et de premier terme $u_1=1000$.

. Pour la deuxième estimation, chaque semaine il y a une progression de 40 journaux.

Pour tout entier naturel $n\geqslant 1$, $v_{n+1}=v_n+40$.

(v_n) est la suite arithmétique de raison $r=40$ et de premier terme $v_1=1000$.

2.b. Pour tout entier naturel n, $u_n=u_1+(n-1)r=1000+(n-1)\times 40=960+40\,n$.

2.c. Pour tout entier naturel $n\geqslant 1$, $v_n=v_1\times q^{n-1}=1000\times 1{,}03^{n-1}$.

3. Le tableau donne les arrondis à l'unité des valeurs de w_n.

On constate que la suite (w_n) n'est pas monotone.

Le tableau nous donne $w_{20}>0$ et $w_{21}<0$.

$w_{20}=v_{20}-u_{20}>0$ donc $v_{20}>u_{20}$

$w_{21}=v_{21}-u_{21}<0$ donc $v_{21}<u_{21}$

on peut affirmer que pour la $21^{\text{ème}}$ semaine le nombre de journaux vendus d'après la première estimation est supérieur au nombre de journaux vendus d'après la deuxième estimation.

Remarque

On peut déterminer les variations de la suite (w_n).

Pour tout entier naturel $n\geqslant 1$.

$w_{n+1}-w_n=v_{n+1}-u_{n+1}-v_n+u_n=v_{n+1}-v_n-u_{n+1}+u_n$

$w_{n+1}-w_n=960+40\times(n+1)-960+40\,n-1000\times 1{,}03^n+1000\times 1{,}03^{n-1}$

$w_{n+1}-w_n=10+1000\times 1{,}03^{n-1}\times(1-1{,}03)=40-30\times 1{,}03^{n-1}=d_n$.

$d_{n+1}-d_n=40-30\times 1{,}03^n-40+30\times 1{,}03^{n-1}=30\times(1-1{,}03)\times 1{,}03^{n-1}=-0{,}9\times 1{,}03^{n-1}<0$.

La suite (d_n) est décroissante.

$d_1=40-30\times 1{,}03^0=10>0$

On peut remarquer que $d_{10}=0{,}86>0$ (arrondi au centième) et que $d_{11}=-0{,}32<0$ (arrondi au centième).

La suite (u_n) est croissante pour les valeurs de n comprises entre 1 et 11 et décroissante pour les autres valeurs de n.

Conséquence :

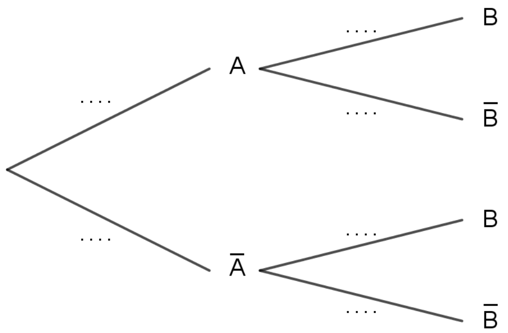
$0=w_1<w_2<\ldots<w_{10}<w_{11}$ $\quad w_{11}>w_{12}>\ldots>w_{20}=6>0$ $\quad -6=w_{21}>w_{22}>\ldots$

EXERCICE 4 (5 points)

On considère deux élevages de chatons sacrés de Birmanie.
. Dans le premier élevage 75 % des chatons deviennent couleur Chocolat et 25 % deviennent couleur Blue.
. Dans le second élevage 30 % des chatons deviennent couleur Chocolat et 70 % deviennent couleur Blue.

Une animalerie se fournit dans ces deux élevages.
Elle achète 40 % de ses chatons au premier élevage et 60 % au deuxième.
On choisit au hasard un chaton de l'animalerie.
On note A l'événement : « le chaton provient du premier élevage » et B l'événement : « le chaton est de couleur Blue ».
On note $\bar{A}$ l'événement contraire de A et $\bar{B}$ l'événement contraire de B.

1.a. Recopier et compléter l'arbre de probabilités ci-dessous.



1.b. Calculer $P(\bar{A} \cap \bar{B})$ et interpréter ce résultat.

1.c. Montrer que la probabilité que le chaton soit de couleur Chocolat est $0{,}48$.

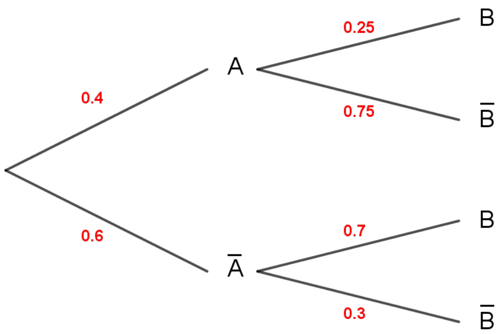
1.d. Sachant que Jules a choisi un chaton couleur Blue dans cette animalerie, quelle est la probabilité que le chaton provienne du deuxième élevage ?
On donnera le résultat à 10^{-2} près.

2. Le responsable du rayon fixe à $100€$ le prix de vente d'un chaton couleur Blue et à $75€$ le prix d'un chaton couleur Chocolat.
On choisit au hasard un chaton de l'animalerie et on désigne par X la variable aléatoire égale au prix du chaton acheté.
Déterminer la loi de probabilité de X.

CORRECTION

1.a. L'animalerie achète 40 % de ses chatons au premier élevage et 60 % au deuxième donc :
$P(A)=0{,}4$ et $P(\bar{A})=0{,}6$.

- Dans le premier élevage 75 % des chatons deviennent couleur Chocolat et 25 % deviennent couleur Blue donc : $P_A(B)=0{,}25$ et $P_A(\bar{B})=0{,}75$.
- Dans le second élevage 30 % des chatons deviennent couleur Chocolat et 7, % deviennent couleur Blue donc : $P_{\bar{A}}(B)=0{,}7$ et $P_{\bar{A}}(\bar{B})=0{,}3$.
- On complète l'arbre de probabilités.



1.b. $P(\bar{A}\cap\bar{B})=P(\bar{A})\times P_{\bar{A}}(\bar{B})=0{,}6\times0{,}3=0{,}18$
Dans l'animalerie il y a 18 % des chatons qui proviennent du second élevage **et** qui sont de couleur Chocolat.

1.c. En utilisant l'arbre de probabilités ou le théorème des probabilités totales, on obtient :
$P(\bar{B})=P(A\cap\bar{B})+P(\bar{A}\cap\bar{B})=P(A)\times P_A(\bar{B})+0{,}18=0{,}4\times0{,}75+0{,}18=0{,}3+0{,}18=0{,}48$.

1.d. On nous demande de calculer : $P_B(\bar{A})$
$P_B(\bar{A})=\dfrac{P(B\cap\bar{A})}{P(B)}=\dfrac{0{,}3}{0{,}48}=\dfrac{30}{48}=\dfrac{5}{8}=0{,}63$ à 10^{-2} près.

2. Les valeurs de l'univers image de X sont : 75 et 100.
$P(X=75)=P(\bar{B})=0{,}48$
$P(X=100)=P(B)=1-0{,}48=0{,}52$
On donne la loi de probabilité de X sous forme de tableau

x_i	75	100
$P(X=x_i)$	0.48	0.52